

Mathilde Hitier

Sylvain Maugeais

# Espaces lenticulaires

Sujet proposé par Mark Baker  
Thème

Soient deux tores solides  $T_1$  et  $T_2$ , et  $h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  un homéomorphisme du bord de  $T_2$  sur le bord de  $T_1$ . On construit alors l'espace

$$V^3 = T_1 \bigcup_h T_2$$

en identifiant le bord,  $\partial T_2$ , de  $T_2$  au bord,  $\partial T_1$ , de  $T_1$  via l'homéomorphisme  $h$ ; c'est à dire en identifiant chaque  $x \in \partial T_2$  avec  $h(x) \in \partial T_1$  dans l'union disjointe de  $T_1$  et  $T_2$ .

### Remarque :

Soient  $f : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  et  $g : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  deux homéomorphismes.  $T_1 \bigcup_f T_2$  et  $T_1 \bigcup_g T_2$  sont des constructions équivalentes (c'est à dire homéomorphes) si l'hypothèse suivante, **(H)**, est vérifiée:

**(H)** Il existe des homéomorphismes  $H_1 : T_1 \rightarrow T_1$  et  $H_2 : T_2 \rightarrow T_2$  tels que  $h_1 = H_1|_{\partial T_1} : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1$  et  $h_2 = H_2|_{\partial T_2} : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$  soient des homéomorphismes vérifiant :  $h_1 \circ f \circ h_2 = g$ . Autrement dit, tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \partial T_2 & \xrightarrow[\sim]{f} & \partial T_1 \\ \uparrow h_2 \wr & & \wr h_1 \downarrow \\ \partial T_2 & \xrightarrow[\sim]{g} & \partial T_1 \end{array}$$

### Propriété (1) :

$V^3$  est un variété de dimension 3 qui ne dépend, à homéomorphisme près, que de la classe d'isotopie de  $h(m_2)$  dans  $\partial T_1$ , où  $m_2$  est un méridien de  $T_2$ .

#### Preuve :

**(i)** Soit  $h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  un homéomorphisme et soient  $m_2$  et  $m'_2$  deux méridiens de  $T_2$ . Alors les classes d'isotopie  $[h(m_2)]$  et  $[h(m'_2)]$  dans  $\partial T_1$  sont égales :  $[h(m_2)] = [h(m'_2)]$ .

En effet, il existe une isotopie  $F : m_2 \sim m'_2$  dans  $\partial T_2$ . Elle est donnée par la rotation de  $m_2$  vers  $m'_2$  et vérifie  $F(m_2, s)$  est un méridien de  $T_2$  pour tout  $s$  dans  $[0,1]$ . Soit alors

$$H : (x, s) \in \partial T_1 \times [0, 1] \mapsto h(F(h^{-1}(x), s)) \in \partial T_1$$

$H$  ainsi définie est une isotopie puisque, à  $s$  fixé dans  $[0,1]$ ,  $F(\cdot, s)$ ,  $h^{-1}$  et  $h$  sont des homéomorphismes. De plus on a :  $H(h(m_2), 0) = h(F(m_2, 0)) = h(m_2)$  et  $H(h(m_2), 1) = h(F(m_2, 1)) = h(m'_2)$ . Donc  $H : h(m_2) \sim h(m'_2)$  dans  $\partial T_1$ .

**(ii)** Soient  $f : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  et  $g : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  deux homéomorphismes et  $m_2$  un méridien de  $T_2$  tels que  $f(m_2) = g(m_2)$ . Alors  $T_1 \bigcup_f T_2$  et  $T_1 \bigcup_g T_2$  sont des constructions équivalentes.

Posons  $h = f^{-1} \circ g$ .  $h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$  ainsi défini est un homéomorphisme vérifiant  $h(m_2) = m_2$ .

Montrons que  $h$  se prolonge sur  $T_2$  tout entier. Pour cela "coupons"  $T_2$  le long du disque  $d_2$  de bord  $m_2$ . On obtient un cylindre,  $C$ , et  $T_2$  est homéomorphe à  $C_i$  qui est le cylindre  $C$  avec ses deux extrémités (qui sont les images de  $d_2$  :  $d_c$  et  $d'_c$ , de bords  $m_c$  et  $m'_c$ , images de  $m_2$ .) identifiées. De plus, puisque  $h(m_2) = m_2$ ,  $h$  induit un homéomorphisme  $h_c$  du bord de  $C_i$ .

Tout homéomorphisme du bord,  $S^n$ , d'une boule,  $B^n$ , de dimension  $n$  se prolonge en un homéomorphisme sur toute la boule. Donc, comme  $h(m_2) = m_2$ ,  $h|_{m_2}$  est un homéomorphisme du cercle qui peut être prolongé sur  $d_2$  et on obtient un homéomorphisme  $h' : \partial T_2 \cup d_2 \rightarrow \partial T_2 \cup d_2$  prolongeant  $h$ . Alors  $h'$  ainsi obtenu induit un homéomorphisme,  $h'_c$ , sur le bord  $\partial C$  du cylindre  $C$  et sur  $\partial C$  moins l'intérieur de  $d_c$  et  $d'_c$  on a  $h'_c = h_c$ .

Or  $C$  est lui-même homéomorphe à une boule,  $B$ . D'où  $T_2 \sim C_i$  est homéomorphe à  $B_i$  qui est la boule  $B$  avec les images  $d_b$  et  $d'_b$  de  $d_c$  et  $d'_c$  identifiées. Donc, par  $h'_c$ ,  $h'$  induit un homéomorphisme,  $h'_b$  de la sphère  $S = \partial B$  et, par  $h_c$ ,  $h$  induit un homéomorphisme de  $\partial B_i$ . Ils vérifient  $h_b = h'_b$  sur  $S$  moins l'intérieur de  $d_b$  et  $d'_b$ . D'après la remarque faite précédemment,  $h'_b$  peut se prolonger en un homéomorphisme,  $H'_b$  de la boule  $B$  toute entière. Celui-ci induit un homéomorphisme  $H_b$  de  $B_i$  prolongeant  $h_b$  et donc un homéomorphisme  $H$  de  $T_2$  prolongeant  $h$ .

On pose  $H_1 = Id : T_1 \rightarrow T_1$  et  $H_2 = H : T_2 \rightarrow T_2$

On obtient donc :

$$h_1 = H_1|_{\partial T_1} = Id : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1 \quad \text{et} \quad h_2 = H_2|_{\partial T_2} = h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$$

Alors on a  $h_1 \circ f \circ h_2 = Id \circ f \circ h = f \circ (f^{-1} \circ g) = g$  donc  $H_1$  et  $H_2$  sont des homéomorphismes vérifiant l'hypothèse **(H)**, d'où le résultat.

(iii) Soient  $f : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  et  $g : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  deux homéomorphismes et  $m_2$  un méridien de  $T_2$  tels que  $f(m_2)$  et  $g(m_2)$  soient isotopes. Alors  $T_1 \cup_f T_2$  et  $T_1 \cup_g T_2$  sont des constructions équivalentes.

En effet, notons  $F$  une isotopie entre  $f(m_2)$  et  $g(m_2)$  définie sur  $\partial T_2 \times [0, 1]$  avec  $F(m_2, 0) = f(m_2)$  et  $F(m_2, 1) = g(m_2)$ . Soient  $f'$  et  $g'$  les homéomorphismes définis par  $f' = F(\cdot, 0)$  et  $g' = F(\cdot, 1)$ .  $f'$  vérifie :  $f'(m_2) = F(m_2, 0) = f(m_2)$  donc d'après (ii),  $T_1 \cup_f T_2$  et  $T_1 \cup_{f'} T_2$  sont équivalentes.  $g$  et  $g'$  vérifiant la même propriété, on a aussi l'équivalence de  $T_1 \cup_g T_2$  et  $T_1 \cup_{g'} T_2$ . De plus, par construction,  $f'$  et  $g'$  sont isotopes par  $F$ . On se ramène ainsi à montrer que si  $f : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  et  $g : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  sont deux homéomorphismes isotopes (par  $F$ ), alors  $T_1 \cup_g T_2$  et  $T_1 \cup_f T_2$  sont équivalentes.

Soit  $h = f^{-1} \circ g$ . On a  $f$  et  $g$  sont isotopes équivaut à  $h$  isotope à l'identité. Soit  $F'$  cette isotopie,  $F' : h \sim Id$ . Soit  $T'_2$  le tore inclu dans  $T_2$  dont les méridiens ont un diamètre deux fois plus petits que ceux de  $T_2$  (En notant  $D(0, r)$  le disque fermée de rayon  $r$ , si  $T_2 = S^1 \times D(0, 1)$ , alors  $T'_2 = S^1 \times D(0, 1/2)$ ). On note  $T_c$  la fermeture du complémentaire de  $T'_2$  dans  $T_2$  :  $T_c = T_2 \setminus T'_2 = S^1 \times (S^1 \times [1/2, 1]) = T^2 \times [1/2, 1]$ . Définissons  $H : T_2 \rightarrow T_2$  de la façon suivante :

$$H|_{T_c} : (x, s) \in T^2 \times [1/2, 1] \mapsto (F'(x, 2(1-s)), s) \in T^2 \times [1/2, 1]$$

$$H|_{T'_2} = Id_{T'_2}$$

$H$  est bien définie : Dans le premier cas,  $H|_{T_c \cap T'_2} (x, 1/2) = (F'(x, 1), 1/2) = (x, 1/2)$  et donc correspond bien à l'identité sur  $T_c \cap T'_2$ . De plus, par construction  $H|_{T_c}$  et  $H|_{T'_2}$  sont des homéomorphismes. Ils coïncident sur  $T_c \cap T'_2$  et  $T_c$  et  $T'_2$  sont deux fermés vérifiant  $T_c \cup T'_2 = T_2$  donc  $H$  ainsi défini est un homéomorphisme de  $T_2$ . De plus  $H|_{\partial T_2} = H(\cdot, 1) = F'(\cdot, 0) = h$

On pose  $H_1 = Id : T_1 \rightarrow T_1$  et  $H_2 = H : T_2 \rightarrow T_2$

On obtient donc :

$$h_1 = H_1|_{\partial T_1} = Id : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1 \quad \text{et} \quad h_2 = H_2|_{\partial T_2} = h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$$

Alors on a  $h_1 \circ f \circ h_2 = Id \circ f \circ h = f \circ (f^{-1} \circ g) = g$  donc  $H_1$  et  $H_2$  sont des homéomorphismes vérifiant l'hypothèse **(H)**, d'où le résultat.

### Notation :

Compte tenu de la proposition précédente, on notera  $m$  ( resp.  $l$  ) pour la classe  $[m]$  ( resp  $[l]$  ) de  $m$  ( resp.  $l$  ) dans le groupe fondamental.

### Définition :

Considérons une construction  $V^3 = T_1 \cup_h T_2$ . On choisit  $l_1$  une longitude et  $m_1$  un méridien de  $T_1$ . Ce sont des générateurs de  $\Pi_1(\partial T_1)$ . On peut alors écrire:

$$h_*(m_2) = p l_1 + q m_1$$

L'espace  $V^3$  obtenu est appelé **espace lenticulaire** de type  $(p, q)$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux et se note habituellement

$$V^3 = L(p, q).$$

En d'autres termes, une variété de dimension 3 est un espace lenticulaire si et seulement si elle contient un tore solide dont la fermeture du complémentaire est aussi un tore solide.

$S^3$  et  $S^2 \times S^1$  ne sont pas toujours considérés comme des espaces lenticulaires bien que satisfaisant la définition.

## Propriété (2) :

Soit  $L(p, q)$  un espace lenticulaire.

Alors  $L(p, q) \cong L(p, -q) \cong L(-p, q) \cong L(-p, -q) \cong L(p, q + kp)$  pour tout entier  $k$ .

### Preuve :

$L(p, q) = V^3 = T_1 \cup_h T_2$  et  $h_*(m_2) = p l_1 + q m_1$ . On peut prendre pour  $l_1$  la longitude de plus grand diamètre. Elle est alors contenue dans un plan de symétrie du tore  $T_1$

(i) Montrons  $L(p, q) \cong L(p, -q)$

Il existe un homéomorphisme du tore  $T_1$ ,  $\phi : T_1 \rightarrow T_1$ , vérifiant  $\phi(m_1) = -m_1$ . On prend pour  $\phi$  la restriction au tore  $T_1$  de la symétrie par rapport au plan contenant  $l_1$ . On note  $\varphi = \phi|_{\partial T_1}$ , cette symétrie restreinte au bord de  $T_1$ , donc c'est aussi un homéomorphisme. De plus  $\varphi(m_1) = -m_1$  et comme  $l_1$  est dans le plan de symétrie,  $\varphi(l_1) = l_1$ . Soit  $g = \varphi \circ h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$ .  $g$  ainsi défini est un homéomorphisme comme composé de deux homéomorphismes. On peut donc définir l'espace  $T_1 \cup_g T_2 = L(p, -q)$ . En effet,  $g_*(m_2) = (\varphi \circ h)_*(m_2) = \varphi_* \circ h_*(m_2) = \varphi_*(p l_1 + q m_1) = p l_1 - q m_1$

On pose  $H_1 = \phi : T_1 \rightarrow T_1$  et  $H_2 = Id : T_2 \rightarrow T_2$

On obtient donc :

$$h_1 = H_1|_{\partial T_1} = \varphi : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1 \quad \text{et} \quad h_2 = H_2|_{\partial T_2} = Id : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$$

Alors on a  $h_1 \circ h \circ h_2 = \varphi \circ h \circ Id = g$  donc  $H_1$  et  $H_2$  sont des homéomorphismes vérifiant l'hypothèse **(H)**, d'où le résultat.

(ii) Montrons  $L(p, q) \cong L(-p, q)$

Il existe un homéomorphisme du tore  $T_1$ ,  $\phi' : T_1 \rightarrow T_1$ , vérifiant  $\phi'(l_1) = -l_1$ . On prend pour  $\phi'$  la restriction au tore  $T_1$  de la symétrie par rapport au plan contenant  $m_1$ . On note  $\varphi' = \phi'|_{\partial T_1}$ , cette symétrie restreinte au bord de  $T_1$ , donc c'est aussi un homéomorphisme. De plus  $\varphi'(l_1) = -l_1$  et comme  $m_1$  est dans le plan de symétrie,  $\varphi'(m_1) = m_1$

Soit  $g' = \varphi' \circ h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$ .  $g'$  ainsi défini est un homéomorphisme comme composé de deux homéomorphismes. On peut donc définir l'espace  $T_1 \cup_{g'} T_2 = L(-p, q)$ . En effet,  $g'_*(m_2) = (\varphi' \circ h)_*(m_2) = \varphi'_* \circ h_*(m_2) = \varphi'_*(p l_1 + q m_1) = -p l_1 + q m_1$

On pose  $H_1 = \phi' : T_1 \rightarrow T_1$  et  $H_2 = Id : T_2 \rightarrow T_2$

On obtient donc :

$$h_1 = H_1|_{\partial T_1} = \varphi' : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1 \quad \text{et} \quad h_2 = H_2|_{\partial T_2} = Id : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$$

Alors on a  $h_1 \circ h \circ h_2 = \varphi' \circ h \circ Id = g'$  donc  $H_1$  et  $H_2$  sont des homéomorphismes vérifiant l'hypothèse **(H)**, d'où le résultat.

(iii) Montrons  $L(p, q) \cong L(-p, -q)$

On a  $L(p, q) \cong L(p, -q)$  par (i) et  $L(p, -q) \cong L(-p, -q)$  par (ii), d'où le résultat.

(iv) Montrons que  $L(p, q) \cong L(p, q + p)$

On a  $\partial T_1 \cong S^1 \times S^1$ . On peut alors paramétrer le bord de  $T_1$ ,  $\partial T_1$ , par  $x \in \partial T_1 \simeq (\theta; \varphi)$ , où  $\theta$  et  $\varphi$  sont dans  $[0, 2\pi]/_{0 \sim 2\pi}$  et sont définis de la façon suivante :  $x \in \partial T_1$  est sur un unique méridien,  $m_x$ , et une unique longitude,  $l_x$ . La donnée de ces deux éléments définit parfaitement  $x$ . On prend alors pour  $\theta$ , l'angle entre les plans contenant  $m_1$  et  $m_x$ , pris dans le sens du déplacement sur  $l_1$  et pour  $\varphi$ , l'angle entre le plan contenant  $l_1$  et le plan  $P_x$ , pris dans le sens du déplacement sur  $m_1$  et où  $P_x$  est le plan orthogonal à celui contenant  $m_x$  et à la surface  $\partial T_1$ . C'est à dire, puisque  $T_1 \cong S^1 \times S^1$ ,  $S^1$  admetant un paramétrage complexe donné par  $S^1 \cong \{e^{i\alpha}\}$ ,  $T^2 \cong \{(e^{i\theta}, e^{i\varphi})$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

On a en particulier :  $l_1 = \{(\theta; 0) \in \partial T_1 / \theta \in [0, 2\pi]/_{0 \sim 2\pi}\}$  et  $m_1 = \{(0; \varphi) \in \partial T_1 / \varphi \in [0, 2\pi]/_{0 \sim 2\pi}\}$ . De plus, d'après la propriété (1), on peut prendre comme représentant de la classe de  $h_*(m_2)$  le lacet :  $\alpha_{(p,q)} : [0, 1] \rightarrow \partial T_1$  défini par  $\alpha_{(p,q)}(t) = (2\pi p t; 2\pi q t)$  (où  $h$  est un homéomorphisme entre  $T_2$  et  $T_1$  définissant  $L(p, q)$ ).

Soit  $\tau : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1$  l'homéomorphisme défini par :  $\tau(\theta; \varphi) = (\theta; \varphi + \theta)$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , on a  $\tau[(2\pi p t; 2\pi q t)] = (2\pi p t; 2\pi(q + p)t)$  d'où  $\tau(\alpha_{(p,q)}) = \alpha_{(p,p+q)}$ . De plus  $\tau(m_1) = m_1$ , donc comme dans le (ii) de la preuve de la propriété (1), il existe un homéomorphisme,  $\mathcal{T}$ , du tore  $T_1$  prolongeant  $\tau$ .

On pose  $H_1 = \mathcal{T} : T_1 \rightarrow T_1$  et  $H_2 = Id : T_2 \rightarrow T_2$

On obtient donc :

$$h_1 = H_1 |_{\partial T_1} = \tau : \partial T_1 \rightarrow \partial T_1 \quad \text{et} \quad h_2 = H_2 |_{\partial T_2} = Id : \partial T_2 \rightarrow \partial T_2$$

Alors on a  $h_1 \circ h \circ h_2 = \tau \circ h \circ Id = \tau \circ h$  donc  $H_1$  et  $H_2$  sont des homéomorphismes vérifiant l'hypothèse **(H)** (avec  $f=h$  et  $g=\tau \circ h$ , d'où  $L(p, q) \cong L(p, p + q) = T_1 \bigcup_{\tau \circ h} T_2$ ).

(v) Montrons que  $L(p, q) \cong L(p, q + k p)$ , pour tout entier  $k$

Le résultat, pour  $k$  positif, s'obtient de (iv) par récurrence sur  $k$  :

" $k=1$ " : vu en (iv).

" $k \Rightarrow k+1$ " ( $k \geq 1$ ) : On suppose  $L(p, q) \cong L(p, q + k p)$ . Par (iv),  $L(p, q + k p) \cong L(p, q + k p + p)$ , donc  $L(p, q) \cong L(p, q + (k + 1)p)$

Pour  $k=-1$  négatif, on pose  $q' = q + k p$ . Alors  $L(p, q + k p) = L(p, q') \cong L(p, q' + l k) = L(p, q)$  d'après le résultat précédent (appliqué avec  $p, q'$  et  $l \geq 0$ ).

Sachant cette propriété, on adopte maintenant la convention  $0 < q < p$ .

### Propriété (3) :

Soit  $L(p, q)$  un espace lenticulaire.

Alors  $L(p, q) \cong L(p, q')$  si  $\pm q q' \equiv 1 \pmod{p}$ .

**Preuve :**

(i) Construction et inverse

Soit  $h : \partial T_2 \rightarrow \partial T_1$  un homéomorphisme du bord de  $T_2$  sur le bord de  $T_1$  permettant de construire l'espace  $V^3 = T_1 \bigcup_h T_2$  en identifiant chaque  $x \in \partial T_2$  avec  $h(x) \in \partial T_1$  dans l'union disjointe de  $T_1$  et  $T_2$ . Ceci revient à identifier chaque  $y \in \partial T_1$  avec  $h^{-1}(y) \in \partial T_2$  dans l'union disjointe de  $T_1$  et  $T_2$ . Donc on a :

$$V^3 = T_1 \bigcup_h T_2 = T_2 \bigcup_{h^{-1}} T_1 \cong T_1 \bigcup_{h^{-1}} T_2$$

(ii) Soient  $p$  et  $q$  des entiers premiers entre eux,  $\varepsilon \in \{-1, +1\}$  et  $q'$  un entier tel que  $q q' \equiv \varepsilon \pmod{p}$ . On note  $k$  l'entier vérifiant  $\varepsilon = q q' + k p$ . Montrons que  $L(p, q) \cong L(p, q')$

En utilisant le paramétrage du (iv) de la preuve précédente, on pose :

$$h : (\theta_2 ; \varphi_2) \in \partial T_2 \longmapsto (\theta_1 ; \varphi_1) = (p \varphi_2 - q' \theta_2 ; q \varphi_2 + k \theta_2) \in \partial T_1$$

h est bien défini car pour tous  $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ , on a  $h(\theta ; 0) = h(\theta ; 2\pi)$  et  $h(0 ; \varphi) = h(2\pi, \varphi)$  puisque p, q, q' et k sont des entiers. De plus h est continue et inversible d'inverse continue donnée par :

$$h^{-1} : (\theta_1 ; \varphi_1) \in \partial T_1 \longmapsto (\theta_2 ; \varphi_2) = (\varepsilon(p \varphi_1 - q \theta_1) ; \varepsilon(q' \varphi_1 + k \theta_1)) \in \partial T_2$$

D'où h et  $h^{-1}$  sont des homéomorphismes. Ils vérifient :

$$\begin{aligned} h(m_2) &= \{ h(0 ; \varphi_2) / \varphi_2 \in [0; 2\pi] \} = \{ h(p \varphi_2 ; q \varphi_2) / \varphi_2 \in [0; 2\pi] \} = \alpha_{(p,q)} \\ h^{-1}(m_1) &= \{ h(\theta_1 ; 0) / \theta_1 \in [0; 2\pi] \} = \{ h(p \theta_1 ; q' \theta_1) / \theta_1 \in [0; 2\pi] \} = \alpha_{(p,q')} \end{aligned}$$

Or d'après (iv) de la preuve précédente,  $T_2 \bigcup_h T_1 = L(p, q)$  et  $T_2 \bigcup_{h^{-1}} T_1 = L(p, q')$  et d'après (i),  $T_2 \bigcup_h T_1 \cong T_1 \bigcup_{h^{-1}} T_2 \cong T_2 \bigcup_{h^{-1}} T_1$  Donc  $L(p, q) \cong L(p, q')$ .

### Propriété (4) : (Groupe fondamental)

Le groupe fondamental de  $L(p, q)$  est le groupe cyclique fini  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

*Preuve :*

Soit  $L(p, q) = T_2 \bigcup_h T_1$ . Le résultat est obtenu grâce au théorème de Van-Kampen.

Pour  $j=1;2$ , soit  $T'_j$  le tore inclu dans  $T_j$  dont les méridiens ont un diamètre deux fois plus petits que ceux de  $T_j$  et on note  $T_j^- = T_j \setminus T'_j$ .

On pose  $U_1 = L(p, q) \setminus T'_2 = T_2^- \bigcup_h T_1$  et  $U_2 = L(p, q) \setminus T'_1 = T_2 \bigcup_h T_1^-$ .  $U_1$  et  $U_2$  sont des ouverts de  $L(p, q)$  connexes par arcs tels que  $U_1 \bigcup U_2 = L(p, q)$  et  $V = U_1 \cap U_2 = T_2^- \bigcup_h T_1^-$  est aussi un ouvert connexe par arcs.

Pour  $j=1;2$ ,  $S^1$  est un rétracte par déformation de  $T_j$  et  $T'_j$  en est lui-même un de  $U_j$  donc  $\Pi_1(U_j) \cong \Pi_1(T_j) \cong \mathbb{Z} = \{l_j\}$ . En notant  $\partial T$  le tore surface  $\partial T_2$  identifié par h à  $\partial T_1$ , on obtient que  $\partial T$  est un rétracte par déformation de  $V$ , donc  $\Pi_1(V) \cong \mathbb{Z}^2 = \{l_2, m_2 / l_2 m_2 = m_2 l_2\}$ .

Les inclusions  $i_j : V \hookrightarrow U_j$ ,  $j=1;2$ , induisent les morphismes  $i_{2*} : \Pi_1(V) \longrightarrow \Pi_1(U_2)$  et  $i_{1*} = h_* : \Pi_1(V) \longrightarrow \Pi_1(U_1)$ . Ils vérifient :

$$\begin{aligned} i_{2*}(m_2) &= m_2 = e & i_{2*}(l_2) &= l_2 \\ i_{1*}(m_2) &= h_*(m_2) = p l_1 + q m_1 = p l_1 & i_{1*}(l_2) &= h_*(l_2) = p' l_1 + q' m_1 = p' l_1 \end{aligned}$$

( $p'$  et  $q'$  sont des entiers dépendants de h)

D'après le théorème de Van-Kampen,

$$\begin{aligned} \Pi_1(L(p, q)) &= \Pi_1(U_1) \bigcup_{\Pi_1(V)} \Pi_1(U_2) \\ &= \{l_1 l_2 / i_{2*}(m_2) = i_{1*}(m_2) = h_*(m_2) ; i_{2*}(l_2) = i_{1*}(l_2) = h_*(l_2)\} \\ &= \{l_1 l_2 / e = p l_1 ; l_2 = p' l_1\} \\ &= \{l_1 / e = p l_1\} \\ &= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{aligned}$$

### Compléments (classification des espaces lenticulaires)

On entendra par "espaces lenticulaires distincts" de tels espaces non homéomorphes.

D'après la proposition (2), tout espace lenticulaire est de la forme  $L(p, q)$  avec p et q premiers entre eux et  $0 < q < p - 1$ . En particulier, pour p donné, il y a au plus  $\varphi(p)$  espaces lenticulaires distincts de la forme  $L(p, q)$  (en notant  $\varphi$  l'indicateur d'Euler). Le résultat de la proposition (3) permet de dire qu'il y en a un nombre inférieur à  $\varphi(p)/2$ , pour chaque p.

Actuellement tous les espaces lenticulaires ont été classifiés (toujours à homéomorphisme près). D'après Brody (1960), on a le résultat suivant :

$L(p, q)$  et  $L(p', q')$  sont homéomorphes si et seulement si  $\pm q' \equiv q^{\pm 1} \pmod{p}$ .

D'après Whitehead (1941), on a aussi le résultat suivant:

$L(p, q)$  et  $L(p', q')$  ont le même type d'homotopies si et seulement si  $\pm q q'$  est un résidu quadratique modulo  $p$ . Cela signifie qu'il existe un entier  $m$  tel que  $\pm q q' \equiv m^2 \pmod{p}$ . Par exemple,  $L(7, 1)$  et  $L(7, 2)$  ont le même type d'homotopies mais ne sont pas homéomorphes.

# Variations

## 1. Construction a partir de $S^3$

La première construction est très proche de la description de la première partie. Elle consiste à retirer un voisinage tubulaire  $V$  d'un noeud trivial de  $S^3$ , de le "tordre" puis de le remettre à sa place de sorte qu'après recollement, un méridien de  $V$  parcourt  $p$  méridien de  $S^3 \setminus V$  et fasse  $q$  tours du noeud trivial.

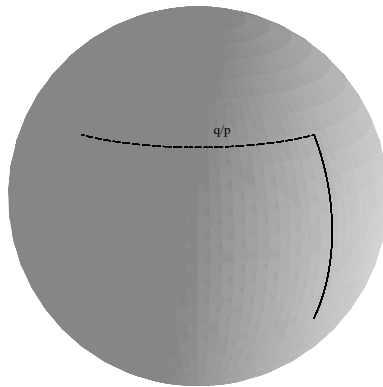
Cette construction est bien équivalente à celle vu précédemment. En effet, Le voisinage tubulaire d'un noeud trivial est un tore ( au moins homéomorphe à un tore, on peut donc se ramener au cas où  $V$  est un tore ). De plus, on a vu dans la première partie que  $S^3$  est un espace lenticulaire, donc l'adhérence du complémentaire d'un tore dans  $S^3$  est un tore,  $S^3 \setminus V$  est donc un tore. Il suffit désormais de considérer  $V_1 = S^3 \setminus V$  et  $V_2 = V$  et on obtient  $L(p, q)$  d'après la définition données dans la première partie.

On peut donc obtenir tout les espaces lenticulaires à partir d'un seul.

## 2. Construction a partir de $B^3$

Nous allons construire maintenant les espaces lenticulaires à partir de  $B^3$ . Les entiers  $p$  et  $q$  étant donnés, à chaque point de l'hémisphère supérieure on associe le point obtenu après rotation d'un angle de  $2\pi q/p$  suivie d'une symétrie par de plan horizontale

( i.e.  $\forall M = (x, y, z) \in \partial B^3, x > 0$  on définit  $M \sim N$  par  $N = (x \cos(2\pi q/p) - y \sin(2\pi q/p), x \sin(2\pi q/p) + y \cos(2\pi q/p), -z)$  ) comme indiqué sur la figure 2.1.

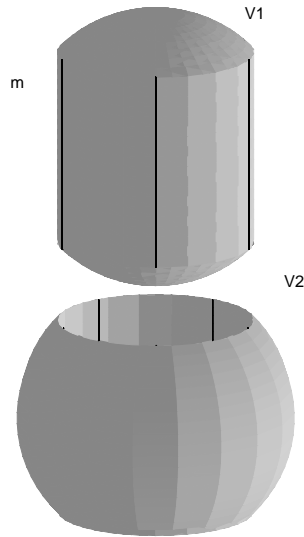


On obtient ainsi une relation d'équivalence sur  $B^3$ . On considère ensuite la topologie quotient et on obtient  $L(p, q)$ .

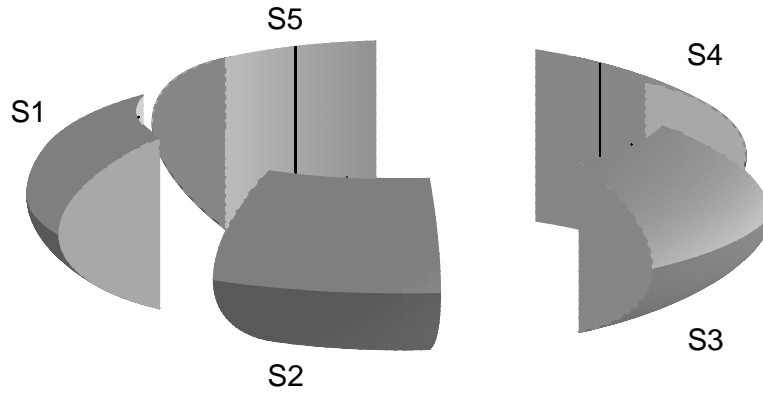
### Démonstration

Soit  $V_1 = \{M = (x, y, z) \in B^3 / x^2 + y^2 \leq 1/4\}$  et soit  $V_2$  l'adhérence de son complémentaire dans  $B^3$ .  $V_1$  est un cylindre avec les extrémités indentifiées après une rotation de  $2\pi q/p$ , c'est donc un tore. Il suffit donc de voir que  $V_2$  est un tore et ainsi on aura bien un espace lenticulaire.

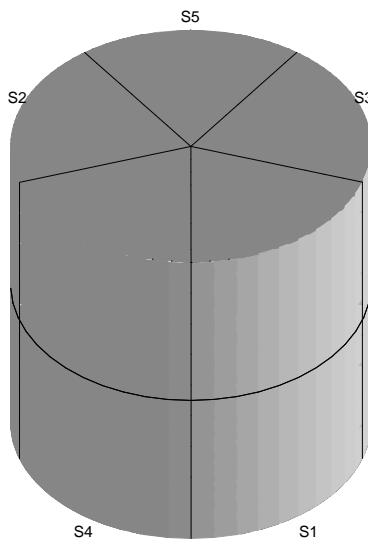




Pour montrer que  $V_2$  est un tore, on procède par découpage et recollement. Le découpage correspond à celui de la figure 2.3, il consiste à découper  $V_2$  selon la verticale en  $p$  parties égales ( donc tout les  $2\pi/p$  ). On obtient ainsi les espaces  $S_1$  à  $S_p$ .



On recolle ensuite selon l'identification décrite au début de ce chapitre ( c.f. figure 2.1 ), ainsi on recolle le "haut" de  $S_i$  au "bas" de  $S_{i+q \text{ mod } p} \dots$  On a alors la figure 2.4.



On recolle ensuite selon le dernier découpage effectué ( c'est a dire  $S_i$  à  $S_{i+1}$  ) cela correspond à un recollement des extrémités du cylindre après un tour de  $2\pi q/p$  ) et on obtient ainsi un tore.

On a donc un espace lenticulaire car l'adhérence du complémentaire d'un tore ( $V_1$ ) est un tore ( $V_2$ ). Il ne nous reste plus qu'à voir que l'on obtient bien  $L(p, q)$ . Pour cela considérons le méridien dessiné sur la figure 2.4 ( on peut suivre son évolution sur toutes les figures ) il correspond à  $p$  droites verticales parallèles sur  $V_1$  ( c.f. figure 2.2 ), et donc après recollement, l'image du méridien parcourt  $p$  longitudes de  $V_1$  et  $q$  méridiens ( grâce au tour de  $2\pi q/p$  ). On a donc bien obtenu  $L(p, q)$ .

### 3. Construction par action sur la boule unité de $\mathbb{C}^2$

Pour cette construction, on considère  $S^3$  comme étant la boule unité de  $\mathbb{C}^2$  ( les deux notations seront utilisées indifféremment dans la suite ) sur laquelle on considère l'action

$$\tau: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(z_0, z_1) \longrightarrow (z_0 w, z_1 w^q) \text{ avec } w = e^{2i\pi/p}$$

$\tau^p = Id$ , on a donc une action de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur  $S^3$ .

#### Proposition

$L(p, q)$  est homéomorphe à un domaine fondamental de cette action

#### Démonstration

- Notation

On considère  $\zeta$  l'homéomorphisme défini par

$$\zeta: [0, 2\pi[ \longrightarrow [0, 2\pi[$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} \frac{px}{2(p-1)} & \text{si } x \in [0, 2\pi \frac{p-1}{p}] \\ p\frac{x}{2} + (2-p)\pi & \text{si } x \in [2\pi \frac{p-1}{p}, 2\pi] \end{cases}$$

On définit ensuite  $\phi$  à l'aide de  $\zeta$

$$\phi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(\rho e^{i\theta}, z + it) \longrightarrow (\rho e^{i\zeta(\theta)}, z + it)$$

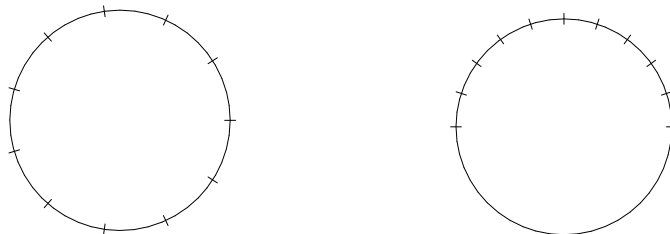
$\phi$  en est un homéomorphisme un en tant que composé d'homéomorphisme.

Soit  $q$  la projection

$$q: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x + iy, z + it) \longrightarrow x + iy$$

On a



$$\xrightarrow{q \circ \phi}$$

Soit  $p$  la projection stéréographique :

$$p: S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \cup \infty$$

$$(x, y, z, t) \longrightarrow \frac{1}{y-1}(x, z, t)$$

$p$  est un homéomorphisme.

- Montrons que l'adhérence de  $B^3$  contient au moins un point de chaque orbite.  
avec  $B^3 = \{p(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \in S^3, y \leq 0\}$  on a donc  
 $B^3 = \{p \circ \phi(\rho e^{i\theta}, z + it) \mid (\rho e^{i\theta}, z + it) \in S^3 \text{ et } \theta \in [2\pi \frac{p-1}{p}, 2\pi]\}$

Pour que  $B^3$  contienne un point d'une orbite il suffit qu'il y ait un point de cette orbite tel que  $Im(q \circ \phi(x + iy, z + it)) \leq 0$  ce qui est le cas. En effet, si on considère seulement l'action sur  $\mathbb{C}$  par  $\theta : z \rightarrow zw$ , alors il y a au moins un point  $x_0$  de l'orbite tel que son argument soit dans  $[2\pi \frac{p-1}{p}, 2\pi]$ , donc son image par  $q \circ \phi(x_0)$  a un argument dans  $[\pi, 2\pi]$  et donc  $p \circ \phi(x_0)$  est dans  $B^3$ .  
 $B^3$  contient donc un point de chaque orbite.

- Montrons que l'intérieur de  $B^3$  contient au plus un point de chaque orbite.

Supposons que  $B^3$  contienne deux points  $x_0$  et  $x_1$  dont les préimages sont dans la même orbite.

On pose  $y_i = q((p \circ \phi)^{-1}(x_i))$ . Alors  $\exists k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < p$  tel que  $arg(y_1) = arg(y_2) + 2k\pi/p \pmod{2\pi}$ . Or par définition  $arg(y_i) \in [2\pi \frac{p-1}{p}, 2\pi]$  donc  $arg(y_i) \in \{2\pi \frac{p-1}{p}, 2\pi\}$  et finalement  $y_i \in S^2$ . Alors l'intérieur de  $B^3$  contient au plus un point de chaque orbite.

- Montrons que  $B^3/\sim \cong L(p, q)$  avec  $\sim$  l'image de la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $S^3$  par  $p \circ \phi$ .

En effet, les points de l'intérieur ne sont identifiés avec aucun autre point de la boule et soit  $x$  et  $y$  des points de la sphère  $S^2$  tels que  $x \sim y$  alors  $x' = (p \circ \phi)^{-1}(x) \sim (p \circ \phi)^{-1}(y) = y'$  par définition. Donc il existe un entier  $k$  tel que  $x' = \tau^k(y')$  par définition de la relation d'équivalence. Or  $x$  et  $y$  étant sur la sphère  $S^2$ ,  $arg(q(x'))$  et  $arg(q(y'))$  sont dans  $\{2\pi \frac{p-1}{p}, 2\pi\}$  donc on peut supposer que  $x' = \tau(y')$  et  $y' = (\rho e^{i2\pi(p-1)/p}, t)$  on a  $x' = (\rho, tw^q)$  alors  $\phi(y') = (\rho e^{i\pi}, t) = (-\rho, t)$  et  $\phi(x') = (\rho, t)$

Donc  $y = (-\rho, z)$  et  $x = (\rho, zw^q)$  et l'identification du paragraphe 2 nous donne  $B^3/\sim \cong L(p, q)$

## Proposition

Soit  $\gamma : B^3 \rightarrow B^3/\sim$  le passage à la topologie quotient, alors on a  
 $(S^3, \gamma \circ p \circ \phi)$  est le revêtement universel de  $L(p, q)$ . et  $\Pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

## Démonstration

Par construction, c'est bien un revêtement.

$(S^3, \gamma \circ p \circ \phi)$  est simplement connexe, on a donc bien le résultat souhaité.

L'ensemble des automorphismes de  $(S^3, \gamma \circ p \circ \phi)$  est engendré par  $\tau$ . En effet, par construction, chaque fibre contient  $p$  éléments donc l'ensemble des automorphismes de  $(S^3, \gamma \circ p \circ \phi)$  contient au plus  $p$  éléments. De plus, le groupe engendré par  $\tau$  contient  $p$  éléments qui sont tous des automorphismes donc l'ensemble des automorphismes de  $(S^3, \gamma \circ p \circ \phi)$  est isomorphe au groupe engendré par  $\tau$  qui est lui-même isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Donc  $\Pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$