



UNIVERSITÉ DE RENNES 1

D.E.A.

MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES
ET APPLICATIONS

Filière I :
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Rapport de Stage

Espace de Teichmüller
des surfaces conformes

Effectué par Mathilde Hitier
Sous la direction de M. J. Huisman

Soutenu le :
21 septembre 1999

Table des matières

Introduction	5
1 Des surfaces conformes	7
1.1 Quelques structures sur les variétés	7
1.1.1 Structures complexes et presque complexes	7
1.1.2 Structures conformes	9
1.1.3 Lien entre les différentes structures	11
1.2 Petit détour du côté des surfaces de Klein	12
1.2.1 Qu'est-ce-qu'une surface de Klein?	12
1.2.2 Équivalence de catégorie	14
1.3 Quelques résultats sur les surfaces conformes	15
1.3.1 Double recouvrement d'une surface conforme	15
1.3.2 Quotient de surface conforme	17
1.3.3 Surfaces conformes et surfaces de Riemann	19
2 Uniformisation	21
2.1 Du côté des groupes cristallographiques non-euclidiens	21
2.1.1 Automorphismes de \mathbb{H}	21
2.1.2 Les groupes C.N.E.	24
2.1.3 Mettons un peu d'ordre	27
2.2 Quotient de \mathbb{H} par un groupe C.N.E.	31
2.2.1 Un peu de topologie	31
2.2.2 Réalisation de surfaces conformes comme quotient	32
2.2.3 Voyons un peu plus loin	35
3 Sur les espaces de Teichmüller	39
3.1 Rappels pour les surfaces de Riemann	39
3.1.1 Définitions et notations	39
3.1.2 Coefficients et différentielles de Beltrami	39
3.1.3 Structure des espaces de Teichmüller des surfaces de Riemann	41
3.2 Introduction aux espaces de Teichmüller des surfaces conformes	43
3.2.1 Définitions	43
3.2.2 Une autre vision de l'espace de Teichmüller	44
3.2.3 Coordonnées	44
3.3 Structure sur les espaces de Teichmüller des surfaces conformes	48
3.3.1 Les espaces	48
3.3.2 Cas des surfaces non géométriquement irréductibles	49
3.3.3 Espace de Teichmüller des surfaces conformes géométriquement irréductibles	50
Bibliographie	53

Introduction

L'objectif de ce rapport est l'étude de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,\tau}$ des surfaces conformes de genre g et de type τ . Une surface conforme est une surface différentiable \mathcal{S} munie d'une structure conforme, c'est à dire d'une classe de proportionnalité de métriques riemanniennes sur \mathcal{S} (voir section 1.1.2). La connaissance de l'espace de Teichmüller (voir sections 3.2 et 3.3) permet de mieux connaître l'espace des modules $\mathcal{S}_{g,\tau}$, qui est l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces conformes genre g et de type τ . En effet, on a la relation $\mathcal{S}_{g,\tau} = \mathcal{T}_{g,\tau}/\Gamma$, où $\Gamma = \text{Diff}_0(\mathcal{S}) \backslash \text{Diff}(\mathcal{S})$ est le groupe modulaire. Cet espace des modules est un espace topologique connexe par arcs (voir section 3.3.1). L'intérêt de passer par les espaces de Teichmüller est que ceux-ci sont réguliers alors que ce n'est généralement pas le cas pour les espaces des modules.

On cherche à munir $\mathcal{T}_{g,\tau}$ d'une certaine structure qui sera analytique complexe dans certains cas (surfaces conformes non géométriquement irréductibles, i.e. surfaces conformes orientables et sans bords donc de type $\tau = +0$) et analytique réelle la plupart du temps (surfaces conformes géométriquement irréductibles, i.e. de type $\tau \neq +0$). Dans le cas des surfaces de Riemann (section 3.1 ou [Nag88, IT92]), on munit l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g d'une structure de variété analytique complexe en utilisant les différentielles de Beltrami sur une surface \mathcal{R} de genre g qui sont des sections du fibré en droites $\Omega^{-1} \otimes \bar{\Omega}$, où Ω est le fibré en droite complexe des formes différentielles complexes sur \mathcal{R} et $\bar{\Omega}$ le fibré conjugué. On pourrait penser appliquer une méthode semblable dans le cas des surfaces conformes, mais le problème est qu'on ne peut définir le fibré Ω sur une surface non orientable. On va alors utiliser les liens qui existent entre les catégories de surfaces conformes et celle des surfaces de Riemann (voir section 1.3.3) car ils induisent des relations entre espaces de Teichmüller de surfaces conformes et espaces de Teichmüller de surfaces de Riemann. La structure recherchée est alors obtenu par transport de structure :

- *Cas des surfaces conformes non géométriquement irréductibles ($\tau = +0$)* : Sachant que les surfaces de Riemann sont des surfaces non géométriquement irréductibles orientées, on obtient $\mathcal{T}_{g,+0} \simeq \mathcal{T}_g$ (section 3.3.2). Comme \mathcal{T}_g a une structure de variété analytique complexe de dimension $3g - 3$, il en va de même pour $\mathcal{T}_{g,+0}$.
- *Cas des surfaces conformes géométriquement irréductibles ($\tau \neq +0$)* : A l'aide du double complexe d'une surface conforme, on obtient $\mathcal{T}_{g,\tau} \simeq \mathcal{T}_{\tilde{g}(g,\tau)}^\Sigma$, où $\tilde{g}(g,\tau)$ est la fonction du genre g et du type τ des surfaces conformes donné par l'équation (1.3) page 17 et $\mathcal{T}_{\tilde{g}(g,\tau)}^\Sigma$ est l'ensemble des points fixes de $\mathcal{T}_{\tilde{g}(g,\tau)}$ pour une certaine action du groupe de Galois Σ de \mathbb{C} sur \mathbb{R} (section 3.3.3). Comme Σ agit antiholomorphiquement sur $\mathcal{T}_{\tilde{g}(g,\tau)}$ qui est une variété analytique complexe de dimension (complexe) $3\tilde{g}(g,\tau) - 3$, alors $\mathcal{T}_{\tilde{g}(g,\tau)}^\Sigma$ est une variété analytique réelle de dimension (réelle) $3\tilde{g}(g,\tau) - 3 = 6g + 3c - 6$ si $\tau = +c$ ou $3g + 3c - 6$ si $\tau = -c$. Il en va donc de même pour $\mathcal{T}_{g,\tau}$.

Ces résultats sur la dimension sont confirmés, dans le cas où $\tilde{g}(g,\tau) \geq 2$, par le calcul des coordonnées de Fricke (section 3.2.2) qui donnent en particulier une injection $\mathcal{T}_{g,\tau} \hookrightarrow \mathbb{R}^{6g+3c-6}$ si $\tau = +c$ ou $\mathcal{T}_{g,\tau} \hookrightarrow \mathbb{R}^{3g+3c-6}$ si $\tau = -c$. On introduit pour cela une autre définition de l'espace de Teichmüller des surfaces conformes de genre g et de type τ basée sur le groupe fondamental $\Pi_1(\mathcal{S})$ d'une surface \mathcal{S} . Ce dernier est fortement lié à un groupe cristallographique non-euclidien Γ (section 2.1.2) tel que $\mathcal{S} \simeq \mathbb{H}/\Gamma$, où \mathbb{H} est le demi-plan de Poincaré (section 2.2.3). C'est pourquoi le chapitre 2 étudie ces sous-groupes discrets de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ et la réalisation des surfaces conformes comme quotient de \mathbb{H} par un tel groupe. Il permet de plus une approche différente des surfaces conformes.

Conventions et notations:

Soit \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux surfaces compactes et c (resp. c') le nombre de composantes connexes du bord $\partial\mathcal{S}$ de \mathcal{S} (resp. du bord $\partial\mathcal{S}'$ de \mathcal{S}'). On dira que ces deux surfaces sont *de même type*, si $c = c'$ et \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont toutes deux ou bien orientables, ou bien non orientables. Le type de \mathcal{S} sera noté $\tau = +c$ si \mathcal{S} est orientable et $\tau = -c$ sinon.

Le genre d'une surface \mathcal{S} est son genre topologique, c'est à dire le nombre maximum de courbes fermées sans points communs que l'on peut tracer sur \mathcal{S} de façon qu'en la découpant suivant ces courbes elle reste d'un seul tenant [BGLL93, page 374].

Par "variété (resp. surface) différentiable" on entend variété (resp. surface) différentiable à bord (éventuellement vide), connexe ou non.

Une surface de Riemann est compacte et connexe. Dans le cas où une surface de Riemann admet un bord (éventuellement vide), on parlera de "surface de Riemann à bord". L'expression "surface de Riemann" désignera une surface de Riemann sans bord. Un morphisme $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ de surface à bord est supposé vérifier : $f(\partial\mathcal{S}) \subseteq \partial\mathcal{S}'$. Une surface conforme est compacte.

Le groupe de Galois de \mathbb{C} sur \mathbb{R} est noté Σ et son élément non trivial σ . Si Σ agit sur X et X' , une application $f : X \rightarrow X'$ est dite équivariante si pour tout $x \in X$, $f(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot f(x)$. Quand on dit que Σ agit sur une variété analytique complexe, σ est supposé agir antiholomorphiquement, i.e., son action sur les sections du faisceau des germes de fonctions holomorphes est antilinéaire. Quand Σ agit sur une surface différentiable orientable, σ est supposé agir en inversant l'orientation.

Remerciement

Je teins particulièrement à remercier M. Huisman, tout d'abord pour avoir accepté d'encadrer ce stage, mais aussi et surtout pour la façon dont il l'a fait ainsi que pour ses conseils avisés.

Je souhaite aussi remercier M. Cerveau qui m'a plus ou moins aiguillée dans mes choix.

Merci enfin à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin lors de ce stage.

Chapitre 1

Des surfaces conformes

1.1 Quelques structures sur les variétés

Les notions énoncées ici sont issues de [Hui99].

1.1.1 Structures complexes et presque complexes

Structures complexes

Soit V , un espace vectoriel réel. Une *structure complexe sur V* est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(V)$. ϕ permet de définir une loi externe $m : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ par $m(\lambda, v) = (\phi(\lambda))(v)$ qui fait de V un espace vectoriel complexe dont la structure d'espace vectoriel réel sous-jacente coïncide avec celle de V . Comme $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$, une structure complexe ϕ sur V est entièrement déterminée par l'image de $\sqrt{-1}$ dans $\text{End}(V)$. Il est donc équivalent de se donner une structure complexe sur V ou un endomorphisme \mathcal{I} de V tel que $\mathcal{I}^2 = -id$.

Soient V et V' deux espaces vectoriels réels munis des structures complexes ϕ et ϕ' respectivement et $L : V \rightarrow V'$ une application \mathbb{R} -linéaire. On note $\mathcal{I} = \phi(\sqrt{-1})$ et $\mathcal{I}' = \phi'(\sqrt{-1})$. L est *linéaire complexe* si l'une des assertions équivalentes suivantes est réalisée :

- (a) $L \circ \phi(\lambda) = \phi'(\lambda) \circ L$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (b) $L \circ \mathcal{I} = \mathcal{I}' \circ L$
- (c) L est \mathbb{C} -linéaire pour les structures de \mathbb{C} -espace vectoriel correspondantes sur V et V' .

Proposition 1.1.1 *Soit V et V' deux espaces vectoriels réels, V' étant muni d'une structure complexe ϕ' , et $L : V \rightarrow V'$ un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire. Il existe une unique structure complexe ϕ sur V telle que L soit complexe par rapport à ϕ et ϕ' . On notera $L^*\phi'$ la structure induite.*

Preuve: Si on pose $L^*\phi'(\lambda) = L^{-1} \circ \phi'(\lambda) \circ L$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $L^*\phi'$ est une structure presque complexe sur V . \square

Proposition 1.1.2 *Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Une structure complexe ϕ sur V induit une orientation ν_ϕ sur V .*

Preuve: On oriente V de la façon suivante :

Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une \mathbb{C} -base de V , on pose $\nu_\phi = [v_1, \mathcal{I}v_1, \dots, v_n, \mathcal{I}v_n]$, où $\mathcal{I} = \phi(\sqrt{-1})$. \square

Si V est un \mathbb{R} -espace vectoriel orienté de dimension finie, une structure complexe ϕ sur V est dite *compatible avec l'orientation* si ν_ϕ coïncide avec l'orientation de V .

Soit V un espace vectoriel réel et ϕ une structure complexe sur V . La *structure complexe conjuguée* $\bar{\phi}$ est définie comme $\bar{\phi}(\lambda) = \phi(\bar{\lambda})$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\mathcal{I} = \phi(\sqrt{-1})$ alors l'endomorphisme associé à $\bar{\phi}$ est $-\mathcal{I}$. Si V est de dimension finie, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$, on a le résultat suivant : si n est impaire, l'orientation $\nu_{\bar{\phi}}$ est l'opposée de ν_ϕ , sinon $\nu_{\bar{\phi}} = \nu_\phi$.

Variétés presque complexes

Soit \mathcal{X} , une variété différentiable réelle. Une *structure presque complexe* sur \mathcal{X} est l'une des données équivalentes suivantes :

- (a) pour tout $p \in \mathcal{X}$, d'une structure complexe ϕ_p sur l'espace tangent $T_p\mathcal{X}$ à \mathcal{X} en p tel que $\phi(\lambda) \cdot X$ soit un champ de vecteur différentiel pour tout champ de vecteur différentiel X sur \mathcal{X} et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- (b) d'un morphisme de \mathbb{R} -algèbre $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \text{End}(T\mathcal{X})$,
- (c) d'un endomorphisme \mathcal{I} du fibré tangent $T\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{I}^2 = -id_{T\mathcal{X}}$,
- (d) d'une structure d'espace vectoriel complexe sur $T\mathcal{X}$ telle que la structure vectorielle réelle sous-jacente coïncide avec celle de départ de $T\mathcal{X}$.

Une variété différentiable munie d'une structure presque complexe est appelée *variété presque complexe*.

Une application différentiable $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ entre les variétés différentiables \mathcal{X} et \mathcal{X}' munies des structures presque complexes ϕ et ϕ' respectivement est dite *presque complexe* (resp. *anti-presque complexe*) si l'application \mathbb{R} -linéaire $T_p f$ est complexe pour les structures complexes ϕ_p et $\phi'_{f(p)}$ (resp. pour les structures complexes ϕ_p et $\overline{\phi'_{f(p)}}$) en tout point p de \mathcal{X} .

Proposition 1.1.3 *Soit \mathcal{X} et \mathcal{X}' deux variétés différentiables, ϕ' une structure presque complexe sur \mathcal{X}' et $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ un difféomorphisme local. Il existe une unique structure presque complexe sur \mathcal{X} telle que f soit presque complexe.*

Preuve: Pour tout $p \in \mathcal{X}$, l'application tangente $T_p f$ est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire. Il existe une unique structure complexe $\phi_p = (T_p f)^* \phi'_{f(p)}$ sur $T_p\mathcal{X}$ telle que $T_p f$ soit complexe. Alors ϕ est une structure presque complexe sur \mathcal{X} et on la note $f^* \phi'$. \square

Remarque: Si $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ et $g : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}''$ sont deux difféomorphismes locaux et ϕ'' une structure presque complexe sur \mathcal{X}'' , alors $(g \circ f)^* \phi'' = f^*(g^* \phi'')$.

Proposition 1.1.4 *Une structure presque complexe ϕ sur \mathcal{X} induit une orientation sur \mathcal{X} .*

Preuve: En tout point p de \mathcal{X} , on a une structure complexe ϕ_p sur $T_p\mathcal{X}$. Elle induit une orientation de $T_p\mathcal{X}$. Celle-ci dépendant continûment de p , elle induit une orientation de \mathcal{X} . \square

Si \mathcal{X} est orientée, on dit que ϕ est *compatible avec l'orientation* si ϕ_p est compatible avec l'orientation de $T_p\mathcal{X}$ pour tout $p \in \mathcal{X}$.

Soit ϕ une structure presque complexe sur une variété différentiable \mathcal{X} . Alors sa *structure presque complexe conjuguée*, $\overline{\phi}$ est définie par $\overline{\phi}_p = \overline{(\phi_p)}$.

variétés analytiques complexes et variétés presque complexes

Théorème 1.1 *Soit \mathfrak{X} une variété analytique complexe et \mathcal{X} la variété différentiable sous-jacente. Alors \mathfrak{X} induit sur \mathcal{X} une structure presque complexe.*

Preuve: La structure presque complexe est obtenue de la façon suivante :

$$T\mathcal{X} \xrightarrow{id \otimes 1} T\mathcal{X} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq T'\mathfrak{X} \oplus T''\mathfrak{X} \xrightarrow{pr_1} T'\mathfrak{X}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varphi} \sim$

$T\mathcal{X}$ désigne le fibré tangent différentiel de \mathcal{X} , $T'\mathfrak{X}$ le fibré tangent holomorphe de \mathfrak{X} et $T''\mathfrak{X} = \overline{T'\mathfrak{X}}$ son fibré tangent antiholomorphe.

On munit $T\mathcal{X}$ de la structure complexe $\varphi^* \mathcal{I}$ où \mathcal{I} est la structure d'espace vectoriel complexe de $T'\mathfrak{X}$. \square

Proposition 1.1.5 *Soient \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' deux variétés complexes. Une application $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ est holomorphe (resp. antiholomorphe) si et seulement si elle est presque complexe (resp. anti-presque complexe) par rapport aux structures presque complexes induites sur \mathcal{X} et \mathcal{X}' .*

Preuve: Cette proposition est la conséquence immédiate du résultat suivant [KN69, proposition 2.2 page 122]:

Une application de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m est holomorphe si et seulement si elle préserve les structures presque complexes de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m . \square

S. Kobayashi et K. Nomizu [KN69] montrent la réciproque au théorème 1.1 dans le cas des variétés différentiables de dimension 2 (cette réciproque est fautive en dimension supérieure).

Théorème 1.2 *Si \mathcal{S} est une surface différentiable compacte connexe orientable sans bords, alors chaque structure presque complexe sur \mathcal{S} provient d'une structure de surface de Riemann sur \mathcal{S} .*

Preuve: Nous ne referons pas ici la preuve de ce résultat. S. Kobayashi et K. Nomizu procèdent par étapes:

1. Ils montrent qu'une structure presque complexe sur une variété différentiable provient d'une structure complexe si et seulement si elle n'a pas de torsion [KN69, Théorème 2.5. page 124].
2. Toute structure presque complexe sur une variété différentiable de dimension 2 est sans torsion [KN69, exemple 2.8. page 141]. \square

On a ainsi montré la

Proposition 1.1.6 *Il existe une correspondance bijective entre surfaces compactes connexes orientables sans bords munies d'une structure presque complexe et surfaces de Riemann.*

1.1.2 Structures conformes

Structures conformes

Soit V , un espace vectoriel réel. Un *produit scalaire sur V* est une forme bilinéaire symétrique définie positive, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, deux produits scalaires sur V . On dira que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ sont *proportionnels* si il existe un réel positif λ tel que $\langle u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle'$ pour tout $u, v \in V$. C'est une relation d'équivalence et les classes de proportionnalité d'un produit scalaire sur V sont appelées *structures conformes sur V* .

Il existe une bijection entre les formes quadratiques définies positives et les produits scalaires. Elle est donnée par : $\langle \cdot, \cdot \rangle \mapsto (q : v \rightarrow \langle v, v \rangle)$. Si q et q' sont deux formes quadratiques définies positives sur V , on dira qu'elles sont *proportionnelles* si il existe un réel positif λ tel que $q = \lambda q'$. Il s'agit encore d'une relation d'équivalence et d'après ce qui précède, il revient au même de se donner une classe de proportionnalité de formes quadratiques définies positives ou de se donner une structure conforme sur V .

Proposition 1.1.7 *Soit V et V' deux espaces vectoriels réels, V' étant muni d'une structure conforme φ' , et $L : V \rightarrow V'$ un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire. Il existe une structure conforme $L^*\varphi'$ induite sur V .*

Preuve: Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ un produit scalaire sur V' représentant φ' . Si on note $L^*\langle \cdot, \cdot \rangle'$ la forme bilinéaire définie sur V par $L^*\langle u, v \rangle = \langle Lu, Lv \rangle'$, alors $L^*\langle \cdot, \cdot \rangle'$ est un produit scalaire. Sa classe de proportionnalité ne dépendant pas du choix de $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, elle définit une structure conforme $L^*\varphi'$ sur V . \square

Soit V et V' des espaces vectoriels réels munis des structures conformes φ et φ' respectivement. Un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire $L : V \rightarrow V'$ est *conforme* si $L^*\varphi' = \varphi$.

Variétés conformes

Soit \mathcal{S} une variété différentiable et $\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle'$ deux métriques riemanniennes sur \mathcal{S} . On dira que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ sont *proportionnels* si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) Les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle'_p$ sont proportionnels en tout point $p \in \mathcal{S}$.
- (ii) Il existe une application différentiable $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\langle X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle'$ pour tous champs de vecteur différentiables X et Y sur \mathcal{S} .

Une *structure conforme* sur \mathcal{S} est une classe de proportionnalité de métriques riemanniennes sur \mathcal{S} .

Si φ est une structure conforme sur \mathcal{S} , φ induit une structure conforme φ_p sur $T_p\mathcal{S}$ en tout point p de \mathcal{S} . De même que pour les structures conformes sur les espaces vectoriels réels, il est possible de définir, de façon équivalente, une structure conforme sur une surface différentiable \mathcal{S} comme la classe de proportionnalité d'une forme quadratique définie positive sur le fibré tangent $T\mathcal{S}$. Une *variété conforme* est une surface différentiable \mathcal{S} munie d'une structure conforme φ .

Proposition 1.1.8 *Soit \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux variétés différentiables, φ' une structure conforme sur \mathcal{S}' . Tout difféomorphisme local $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ induit une structure conforme $f^*\varphi'$ sur \mathcal{S} .*

Preuve: On définit $f^*\varphi'$ en posant en tout point p de \mathcal{S} $(f^*\varphi')_p = (T_p f)^*\varphi'_p$. C'est une structure conforme. \square

Remarque: Si $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ et $g : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}''$ sont deux difféomorphismes locaux et φ'' une structure conforme sur \mathcal{S}'' , alors $(g \circ f)^*\varphi'' = f^*(g^*\varphi'')$.

Si (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') sont des variétés conformes, un difféomorphisme local $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est *conforme* si $f^*\varphi' = \varphi$ et si $f(\partial\mathcal{S}) \subseteq \partial\mathcal{S}'$.

Homéomorphismes quasi-conformes

On trouvera plus de détails dans [Nag88] ou dans [IT92].

Soient $U, U' \subseteq \mathbb{C}$ deux ouverts, $h : U \rightarrow U'$ un homéomorphisme préservant l'orientation et $z \in U$. On note, pour $r \in \mathbb{R}^+$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned} L(z, r) &= \max_{|w-z|=r} |h(w) - h(z)| \\ l(z, r) &= \min_{|w-z|=r} |h(w) - h(z)| \end{aligned}$$

La *dilatation circulaire* de h est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H : U &\rightarrow [1; +\infty] \\ z &\mapsto \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{L(z, r)}{l(z, r)} \end{aligned}$$

h est *quasi-conforme* si sa dilatation circulaire est bornée sur U et h est *k-quasi-conforme* pour $k \in \mathbb{R}^+$ si sa dilatation circulaire vérifie $H \leq k$ presque partout dans U . On dira que h est *conforme* si h est 1-quasi-conforme.

Théorème 1.3 *Soit $h : U \rightarrow U'$ un homéomorphisme quasi-conforme. Alors h est dérivable presque partout dans U .*

De plus, sa dilatation circulaire H vérifie : $H = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$ avec $\mu = \frac{\partial h}{\partial z} \in L^\infty(U)_1$

Soient \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' des surfaces de Riemann et $h : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ un homéomorphisme préservant l'orientation. On dira que h est *k-quasi-conforme* pour $k \in \mathbb{R}^+$ si, pour toutes cartes (U, \mathfrak{z}) et (U', \mathfrak{z}') de \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' respectivement telles que $h(U) \subseteq U'$, alors $\mathfrak{z}' \circ h \circ \mathfrak{z}$ est *k-quasi-conforme*. Si il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que h est *k-quasi-conforme*, h est *quasi-conforme* et h est *conforme* si h est 1-quasi-conforme.

Remarque: Si h est différentiable, on voit que la notion de morphisme conforme définie ici et celle définie précédemment coïncident.

Le théorème suivant est un théorème d'existence qui se révèlera utile dans la section 3.1.3.

Théorème 1.4 (Bers-Ahlfors)

Soit $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = L^\infty(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))_1 \cdot \frac{dz}{d\bar{z}}$. Alors, il existe un unique homéomorphisme quasi-conforme $h_\mu : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que :

- $\mu_{(h_\mu)} = \frac{\partial h_\mu}{\partial z} = \mu$
- $0, 1$ et ∞ sont points fixes de h_μ .

1.1.3 Lien entre les différentes structures

Sur les \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension 2

Proposition 1.1.9 *Une structure complexe ϕ sur un espace vectoriel réel de dimension 2 induit une structure conforme φ_ϕ sur V . De plus une paire non ordonnée de structures complexes conjuguées détermine une structure conforme.*

Réciproquement, une structure conforme φ sur un espace vectoriel V de dimension 2 détermine une paire non ordonnée de structures complexes.

Preuve: Posons $\mathcal{I} = \phi(\sqrt{-1})$. Soit x un élément non nul du dual de V et $y = x \circ \mathcal{I}$. On définit alors une forme quadratique q_x sur V par : $q_x(v) = x(v)^2 + y(v)^2$ pour tout $v \in V$. q_x est une forme définie positive dont la classe de proportionnalité ne dépend pas du choix de x . Donc la structure conforme φ_ϕ définie par q_x ne dépend pas du choix de x .

Par construction, $\varphi_\phi = \varphi_{\bar{\phi}}$, où $\varphi_{\bar{\phi}}$ est la structure conforme induite par la structure complexe conjuguée $\bar{\phi}$. Donc ϕ et $\bar{\phi}$ déterminent $\varphi_\phi = \varphi_{\bar{\phi}}$.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire représentant φ et $SO(V)$ le groupe spécial orthogonal de V relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors il existe deux éléments \mathcal{I} et \mathcal{I}' de $SO(V)$ vérifiant l'équation $X^2 = -Id$. Si on note ϕ et ϕ' , les structures complexes associées sur V , ϕ et ϕ' sont conjuguées puisque $\mathcal{I} = -\mathcal{I}'$. Comme le sous-groupe $SO(V)$ de $Gl(V)$ ne dépend que de la structure conforme, la paire non ordonnée de structures complexes conjuguées ne dépend pas du choix de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. \square

On obtient ainsi une correspondance bijective entre structures conformes sur V et paires non ordonnées de structures complexes sur V . Si l'on se donne une orientation ν sur V , seulement l'une des deux structures complexes conjuguées est compatible avec l'orientation. On obtient alors une correspondance bijective entre structures conformes sur V et structures complexes compatibles avec l'orientation sur V .

Cette correspondance est naturelle dans le sens où, si $L : V \rightarrow V'$ est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire, ϕ' une structure complexe et φ' la structure conforme associée sur V' , la structure conforme associée à la structure complexe $L^*\phi$ et $L^*\varphi$. Ainsi si L préserve l'orientation, L est conforme par rapport à φ et φ' si et seulement si elle est complexe pour ϕ et ϕ' .

Au niveau des variétés

Soit \mathcal{S} , une surface différentiable connexe. Une structure presque complexe ϕ sur \mathcal{S} induit une structure conforme φ sur \mathcal{S} . En effet, ϕ_p est une structure complexe sur $T_p\mathcal{S}$ pour tout $p \in \mathcal{S}$. Cette structure complexe induit une structure conforme φ_p sur $T_p\mathcal{S}$ (cf paragraphe précédent).

Si $\bar{\phi}$ est la structure presque complexe conjuguée, alors la structure conforme induite par $\bar{\phi}$ est la même que celle induite par ϕ . Ainsi, une paire non ordonnée de structures presque complexes conjuguées détermine une structure conforme sur \mathcal{S} .

Réciproquement, une structure conforme φ sur \mathcal{S} détermine une paire non ordonnée de structures presque complexes conjuguées. En effet, φ_p est une structure complexe sur $T_p\mathcal{S}$ pour tout $p \in \mathcal{S}$. Cette structure complexe induit une paire non ordonnée de structures presque complexes conjuguées ϕ_p et ϕ'_p sur $T_p\mathcal{S}$ (cf paragraphe précédent).

Ceci nous donne le

Théorème 1.5 *Il existe une correspondance bijective entre structures conformes sur \mathcal{S} et paires non ordonnées de structures presque complexes sur \mathcal{S} .*

Si \mathcal{S} est orientable et que l'on se donne une orientation ν . On obtient une correspondance bijective entre structures conformes sur \mathcal{S} , structures presque complexes compatibles avec l'orientation sur \mathcal{S} et structure de variété analytique complexe sur \mathcal{S} .

Cette correspondance est naturelle dans le sens où, si $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est un difféomorphisme local, ϕ' une structure complexe et φ' la structure conforme associée sur V' , la structure conforme associée à la structure complexe $f^*\phi$ et $f^*\varphi$. Ainsi on a la

Proposition 1.1.10 - Si f préserve l'orientation, f est conforme par rapport à φ et φ' si et seulement si elle est presque complexe pour ϕ et ϕ' . En particulier, f est conforme par rapport à φ si et seulement si f est holomorphe pour les structures analytiques complexes induisant ϕ et ϕ' .
- Si f inverse l'orientation, f est conforme par rapport à φ et φ' si et seulement si elle est anti-presque complexe pour ϕ et ϕ' . En particulier, f est conforme par rapport à φ si et seulement si f est antiholomorphe pour les structures analytiques complexes induisant ϕ et ϕ' .

Preuve: Ces résultats sont des conséquences immédiates de ce qui précède et de la proposition 1.1.5. \square

1.2 Petit détour du coté des surfaces de Klein

On ne donnera ici essentiellement que la définition d'une surface de Klein. Pour plus de détails sur cette notion, le lecteur pourra se référer au livre de N. Alling et N. Greenleaf [AG71] ou bien à celui de E. Bujalance et al. [BEGG90].

1.2.1 Qu'est-ce-qu'une surface de Klein?

Rappels d'analyse complexe

Soit \mathcal{E} un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^2 et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application dérivable. On identifiera \mathbb{R}^2 et le plan complexe \mathbb{C}

$$\text{On rappelle que } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

f est dite *analytique* si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et *antianalytique* si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur \mathcal{E} . Si sur chaque composante connexe \mathcal{S} de \mathcal{E} , f est soit analytique soit antianalytique, alors f est dite *dianalytique*.

Les fonctions dianalytiques sur \mathcal{S} qui sont à la fois analytique et antianalytique sont les fonctions constantes.

Comme $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, on a la propriété suivante :

Proposition 1.2.1 f (resp. \bar{f}) est analytique si et seulement si \bar{f} (resp. f) est antianalytique.

Soit f et g deux fonctions dianalytiques définies respectivement sur \mathcal{E} et $\mathcal{F} \supseteq f(\mathcal{E})$. Alors $h = g \circ f$ est dianalytique. De plus, sur chaque composante connexe de \mathcal{E} , h est analytique si f et g sont toutes deux analytiques ou antianalytiques. Si l'une est analytique et l'autre antianalytique, alors h est antianalytique.

Atlas dianalytique

Soit $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im_m z \geq 0\}$, le demi-plan supérieur. Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} des sous-ensembles de \mathbb{C}^+ . Une application continue $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est *analytique* (resp. *antianalytique*) sur \mathcal{E} si elle s'étend en une fonction analytique (resp. antianalytique) sur un voisinage de \mathcal{E} dans \mathbb{C} . Si sur chaque composante connexe \mathcal{S} de \mathcal{E} , f est soit analytique soit antianalytique, alors f est dite *dianalytique*.

Théorème 1.6 (Réflexion de Schwarz)

Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' , deux sous-ensembles de \mathbb{C}^+ et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application dianalytique sur l'intérieur de \mathcal{E} et vérifiant $f(\mathcal{E} \cap \mathbb{R}) \subset \mathcal{E}' \cap \mathbb{R}$. Alors, f est dianalytique sur \mathcal{E} .

Preuve: Notons $\bar{\mathcal{E}} = \{\bar{z} \mid z \in \mathcal{E}\}$. Alors f s'étend en une fonction dianalytique $\tilde{f} : \mathcal{E} \cup \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}' \cup \bar{\mathcal{E}'}$ en posant, pour $\bar{z} \in \bar{\mathcal{E}}$, $\tilde{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ \square

Soit \mathcal{S} une surface à bord (éventuellement vide) munie d'un atlas \mathfrak{A} . On dira que \mathfrak{A} est *dianalytique* (resp. *analytique*) si ses fonctions de transition sont dianalytiques (resp. analytiques).

Deux atlas dianalytiques (resp. analytiques) \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' sur une surface \mathcal{S} sont dit *dianalytiquement équivalents* (resp. *analytiquement équivalents*) si l'atlas $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ est dianalytique (resp. analytique). Il s'agit bien sûr d'une relation d'équivalence. Une *structure dianalytique* (resp. *structure analytique*)

sur \mathcal{S} est une classe d'équivalence d'atlas dianalytique (resp. analytique). Une surface compacte connexe \mathcal{S} munie d'une structure dianalytique \mathfrak{S} est alors appelée *surface de Klein*. On notera souvent \mathfrak{S} pour " \mathcal{S} munie de \mathfrak{S} ".

Le théorème [AG71, théorème 1.7.1 page 46] qui suit nous donne l'existence de structures dianalytiques.

Théorème 1.7 *Soit \mathcal{S} une surface compacte (connexe). Il existe une structure dianalytique \mathfrak{S} sur \mathcal{S} , d'où \mathfrak{S} est une surface de Klein.*

Les morphismes

Afin de définir les morphismes entre surfaces de Klein, nous avons besoin de l'*application pliage* $\mathcal{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^+$ donnée par $\mathcal{F}(x + iy) = x + i|y|$

Soit \mathcal{E} un sous-ensemble de \mathbb{C}^+ , alors $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cup \overline{\mathcal{E}}$, en particulier, $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus \mathcal{F} est une application ouverte.

Un *morphisme entre les surfaces de Klein* \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' est une application continue $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ telle que :

- (i) $f(\partial\mathcal{S}) \subseteq \partial\mathcal{S}'$
- (ii) Pour tout $p \in \mathcal{S}$ il existe des cartes (U, \mathfrak{z}) et (U', \mathfrak{z}') en p et $f(p)$ respectivement, et une fonction holomorphe $F : \mathfrak{z}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \mathfrak{z} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{z}' \\ \mathfrak{z}(U) & \xrightarrow{F} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbb{C}^+ \end{array} \quad (1.1)$$

Remarques: (i) Dans le cas où $\partial\mathcal{S}' = \emptyset$, ou bien simplement si $p \notin \partial\mathcal{S}$ et $f(p) \notin \partial\mathcal{S}'$, on peut remplacer le diagramme (1.1) par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \mathfrak{z} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{z}' \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \end{array} \quad (1.2)$$

(ii) On peut étendre F en une fonction analytique $\tilde{F} : \mathfrak{z}(U) \cup \overline{\mathfrak{z}(U)} \rightarrow \mathbb{C}$ en utilisant le principe de réflexion de Schwarz, puisque $f(\partial\mathcal{S}) \subseteq \partial\mathcal{S}'$, F est à valeurs dans \mathbb{R} sur $\mathbb{R} \cap \mathfrak{z}(\partial\mathcal{S} \cap U)$.

(iii) La principale différence entre morphismes dans la catégorie des surfaces de Klein et dans celle des surfaces de Riemann est l'apparition de \mathcal{F} dans le diagramme (1.1). Cependant, si on considère deux applications analytiques $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un ouvert connexe de \mathbb{C} , telles que $\mathcal{F}f_1 = \mathcal{F}f_2$, alors $f_1 = f_2$.

A première vue, la notion de morphisme paraît être essentiellement locale, pourtant, on a la propriété suivante :

Proposition 1.2.2 *Soit $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ un morphisme non constant et (U, \mathfrak{z}) , (U', \mathfrak{z}') deux cartes quelconques de \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' telles que $f(U) \subseteq U'$ et $\mathfrak{z}'(U') \subseteq \mathbb{C}^+$. Alors il existe une unique application analytique $F : \mathfrak{z}(U) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U' \\ \mathfrak{z} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{z}' \\ \mathfrak{z}(U) & \xrightarrow{F} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbb{C}^+ \end{array}$$

1.2.2 Équivalence de catégorie

Le but de cette section est de montrer l'équivalence entre la catégorie des surfaces de Klein et celle des surfaces conformes.

Le lien entre les objets

Proposition 1.2.3 *Soit \mathcal{S} une surface compacte différentiable. A toute structure dianalytique \mathfrak{S} sur \mathcal{S} , on peut associer une structure conforme $\varphi_{\mathfrak{S}}$. Réciproquement, si φ est une structure conforme sur \mathcal{S} , on peut lui associer une structure dianalytique \mathfrak{S}_{φ} . De plus ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre.*

Preuve: Supposons \mathcal{S} munie d'une structure dianalytique \mathfrak{S} . Soit $p \in \mathcal{S}$ et \mathcal{X} une sous-variété orientable de \mathfrak{S} contenant p . Il existe alors deux structures presque complexes conjuguées induites sur \mathcal{X} par \mathfrak{S} (cf. section 1.1.1). On leur associe la même structure conforme $\varphi_{\mathcal{X}}$ (cf. section 1.1.3). Par construction et puisque \mathcal{S} est compacte, les structures conformes $\varphi_{\mathcal{X}}$ se recollent en une structure conforme φ sur \mathcal{S} .

Réciproquement, supposons \mathcal{S} munie d'une structure conforme φ et soit $p \in \mathcal{S}$. Il existe une sous-variété \mathcal{X} de \mathcal{S} , orientable et contenant p . Chacune des orientations donne à \mathcal{X} une structure de surface de Riemann. Elles sont toutes deux dans la même classe de structure dianalytique \mathfrak{X} pour \mathcal{X} (cf. section 1.1.1). Si p' est un autre point de \mathcal{S} et \mathcal{X}' la structure dianalytique sur \mathcal{X}' construite comme précédemment, on considère une composante connexe V de $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}'$. Alors V est orientable et, par construction, la structure dianalytique obtenue sur V est la même que $\mathfrak{X}|_V$ et que $\mathfrak{X}'|_V$, ce qui nous donne une structure de variété dianalytique sur \mathcal{S} . \square

En ce qui concerne les morphismes

Soit $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ un morphisme de surface de Klein et p un point de \mathcal{S} . On peut choisir une carte (U, \mathfrak{z}) en p tel que U soit un voisinage connexe orienté de p et une carte $(U' = f(U), \mathfrak{z}')$ en $p' = f(p)$ tel que U' soit un voisinage connexe orienté de p' avec $f|_U : U \rightarrow U'$ morphisme pour les variétés analytiques (U, \mathfrak{z}) et (U', \mathfrak{z}') . Par construction des structures conformes φ et φ' associées à \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' respectivement, donc des structures conformes φ_U et $\varphi'_{U'}$ induites sur les variétés analytiques U et U' respectivement, on a $(f^*\varphi')_U = \varphi_U$. Ainsi le morphisme f est un morphisme conforme pour les structures conformes φ et φ' .

Réciproquement, soit $f : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}', \varphi')$ un morphisme conforme, \mathfrak{S} (resp. \mathfrak{S}') la structure dianalytique induite par φ sur \mathcal{S} (resp. par φ' sur \mathcal{S}') et p un point de $\mathcal{S} \setminus \partial\mathcal{S}$. Il existe un voisinage connexe orientable U de p et un voisinage connexe orientable $U' = f(U)$ de $p' = f(p)$ et deux structures analytiques \mathfrak{S}_U sur U (resp. $\mathfrak{S}'_{U'}$ sur U') induite par \mathfrak{S} (resp. \mathfrak{S}'). On en choisie une. D'après la proposition 1.1.10, $f|_U$ est un morphisme holomorphe ou antiholomorphe pour les structures analytiques \mathfrak{S}_U et $\mathfrak{S}'_{U'}$, donc un morphisme dianalytique pour les structures \mathfrak{S}_U et $\mathfrak{S}'_{U'}$. Les $f|_U$ se recollent en $f : \mathcal{S} \setminus \partial\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ qui est alors un morphisme dianalytique. En utilisant le principe de réflexion de Schwarz (Théorème 1.6), et puisque $f(\partial\mathcal{S}) \subseteq \partial\mathcal{S}'$, on voit que f est dianalytique sur tout \mathcal{S} .

On a ainsi démontré la

Proposition 1.2.4 *Il existe une bijection entre la catégorie des surfaces de Klein et celle des variétés conforme par le foncteur:*

$$F : \begin{cases} \mathfrak{S} & \mapsto (\mathcal{S}, \varphi_{\mathfrak{S}}) \\ f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}' & \mapsto f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' \end{cases}$$

d'inverse

$$F^{-1} : \begin{cases} (\mathcal{S}, \varphi) & \mapsto \mathfrak{S}_{\varphi} \\ f : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}', \varphi') & \mapsto f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}' \end{cases}$$

où $(\mathcal{S}, \varphi_{\mathfrak{S}})$ et \mathfrak{S}_{φ} sont donnés par la proposition 1.2.3, \mathcal{S} étant la surface différentiable sous-jacente de \mathfrak{S} .

1.3 Quelques résultats sur les surfaces conformes

1.3.1 Double recouvrement d'une surface conforme

Théorème 1.8 *Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme. Il existe un double revêtement ramifié le long du bord de \mathcal{S} , $f : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi}) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ de \mathcal{S} par une variété presque complexe $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ sans bord munie d'une action de Σ telle que $f \circ \sigma = f$. De plus, σ représente le seul automorphisme anti-presque complexe de $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ tel que $f \circ \sigma = f$.*

Si $g : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ est un tel autre double revêtement avec (\mathcal{X}, ϕ) une variété presque complexe, alors, il existe un unique isomorphisme presque complexe $\rho : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\rho} & \tilde{\mathcal{S}} \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

Preuve: Construction: Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme. En tout point p de \mathcal{S} , on choisit un voisinage ouvert connexe orientable U_p . La structure conforme φ induit sur chacun des U_p deux structures presque complexes ϕ_p et $\phi'_p = \overline{\phi_p}$ (cf. section 1.1.3). Pour tout $p \in \mathcal{S}$, on pose $V_p = U_p \times \{\phi_p\}$ et $V'_p = U_p \times \{\phi'_p\}$. Alors $\hat{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcup_{p \in \mathcal{S}} V_p \right\} \cup \left\{ \bigcup_{p \in \mathcal{S}} V'_p \right\}$ est munie d'une action de Σ donnée par : $\sigma \cdot (\{s\} \times \{\phi\}) = \{s\} \times \{\phi'\}$ et $\sigma \cdot (\{s\} \times \{\phi'\}) = \{s\} \times \{\phi\}$. Puis on réalise les identifications suivantes :

- (a) Soit $p \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{D}_p = \partial \mathcal{S} \cap U_p$, on identifie $\mathcal{D}_p \times \{\phi_p\}$ et $\mathcal{D}_p \times \{\phi'_p\}$.
- (b) Soit $p, q \in \mathcal{S}$ tels que $U_p \cap U_q \neq \emptyset$. Pour toute composante connexe \mathcal{W} de $U_p \cap U_q$, on identifie $\mathcal{W} \times \{\phi_p\}$ et $\mathcal{W} \times \{\phi_q\}$, ainsi que $\mathcal{W} \times \{\phi'_p\}$ et $\mathcal{W} \times \{\phi'_q\}$ si $\phi_p|_{\mathcal{W}} = \phi_q|_{\mathcal{W}}$. Dans le cas contraire, i.e. $\phi_p|_{\mathcal{W}} = \overline{\phi_q}|_{\mathcal{W}} = \phi'_q|_{\mathcal{W}}$, on identifie $\mathcal{W} \times \{\phi_p\}$ et $\mathcal{W} \times \{\phi'_q\}$, ainsi que $\mathcal{W} \times \{\phi'_p\}$ et $\mathcal{W} \times \{\phi_q\}$.

Si on pose $\tilde{\mathcal{S}} = \hat{\mathcal{S}} / \{\text{identifications (a) et (b)}\}$, alors $\tilde{\mathcal{S}}$ est naturellement munie d'une structure de variété différentiable faisant de la projection canonique $\pi : \hat{\mathcal{S}} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ une application différentiable. De plus, $\tilde{\mathcal{S}}$ est munie d'une structure presque complexe $\tilde{\varphi}$, obtenue en recollant les ϕ_p et ϕ'_p lors des identifications. Par construction, $\partial \tilde{\mathcal{S}} = \emptyset$ et l'action de Σ sur $\hat{\mathcal{S}}$ étant compatible avec les identifications réalisées, induit une action de Σ sur $\tilde{\mathcal{S}}$ qui est anti-presque complexe.

Il reste à construire un morphisme conforme $f : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi}) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ vérifiant de plus $f \circ \sigma = f$. Pour $\tilde{p} = \pi(p, \phi_p) \in \tilde{\mathcal{S}}$, on pose $f(\tilde{p}) = p$. On obtient alors le double revêtement $f : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi}) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ de (\mathcal{S}, φ) souhaité. Il est non ramifié et $f \circ \sigma = f$.

Unicité: Si σ' est un autre automorphisme de $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ tel que $f \circ \sigma' = f$, supposons qu'il existe $p \in \tilde{\mathcal{S}}$ tel que $p' = \sigma'(p) \neq p$. Alors $f(p') = f(p)$, donc $\sigma'(p) = p$ et $p = (\sigma\sigma')(p) = \sigma(p)$. Par construction de σ , cela signifie que $f(f^{-1}(p)) = \{p\}$ et donc que $p = p'$, ce qui est impossible. D'où $\sigma = \sigma'$ et σ est le seul automorphisme anti-presque complexe de $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ tel que $f \circ \sigma = f$.

Soit $g : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$, un autre double revêtement. Supposons qu'il existe une application $\rho : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ telle que $f \circ \rho = g$. Si ρ n'est pas surjective, $\tilde{\mathcal{S}}$ doit avoir deux composantes connexes et ρ doit être une surjection sur l'une d'entre elles. Donc $\rho = \rho\sigma'$ qui est antianalytique, ce qui est impossible. Comme $f : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi}) \rightarrow \mathcal{S}$ et $g : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow \mathcal{S}$ sont deux doubles revêtements, ρ est un isomorphisme. L'existence d'une application $\rho : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ telle que $f \circ \rho = g$ nous est donnée par la proposition suivante (1.3.1) ce qui clos la preuve. \square

On appellera le triplet $\left((\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi}), f, \sigma \right)$ le *double presque complexe* de (\mathcal{S}, φ) .

Remarque: D'après la section 1.1.3, $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\varphi})$ admet une unique structure de surface de Riemann induite par $\tilde{\varphi}$. Ainsi dans le théorème précédent et dans ce qui suit, on pourra voir à la place de surfaces presque complexes des surfaces de Riemann (connexes ou non) et obtenir ainsi le double complexe $(\tilde{\mathcal{S}}, f, \sigma)$ de (\mathcal{S}, φ) .

Propriétés

Proposition 1.3.1 *Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme, $((\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}), f, \sigma)$ son double presque complexe. Si (\mathcal{X}, ϕ) est une surface presque complexe et $g : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ un morphisme non constant, alors il existe une unique application presque complexe $\rho : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi})$ telle que $f \circ \rho = g$.*

Preuve: On définit ρ de la façon suivante : Soit p un point de \mathcal{X} et $q = g(p)$. Deux cas se présentent :

- Si $q \in \partial\mathcal{S}$, alors $f^{-1}(q) = \{\tilde{q}\}$. On pose $\rho(p) = f^{-1} \circ g(p)$.
- Si $q \notin \partial\mathcal{S}$, alors $f^{-1}(q) = \{\tilde{q}, \tilde{q}'\} = \{q \times \phi_q, q \times \phi'_q\}$ (voir la construction du théorème 1.8). On choisit ϕ_q tel que, si U_p est un voisinage suffisamment petit de p , alors $g : (U_p, \phi|_{U_p}) \rightarrow (U_q, \phi_q)$ est un morphisme presque complexe et on pose alors $\rho(p) = q \times \phi_q$.

Il faut maintenant vérifier que ρ est bien un morphisme presque complexe. Par construction, ρ est continu. De plus, tout point p de \mathcal{X} tel que $g(p) \notin \partial\mathcal{S}$ admet un voisinage ouvert V_p tel que $\rho|_{V_p} = (f|_{\rho(V_p)})^{-1} \circ g$. D'où ρ est différentiable sur $\mathcal{X} \setminus g^{-1}(\partial\mathcal{S})$. Par construction, ρ est alors presque complexe sur \mathcal{X} .

Si $\rho' : (\mathcal{X}, \phi) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi})$ est un autre morphisme presque complexe telle que $f \circ \rho' = g$. Supposons qu'il existe un point $p \in \mathcal{X}$ tel que $\rho(p) \neq \rho'(p)$. Cela signifie que $\rho(p) = \sigma(\rho'(p))$ et par continuité, cette égalité reste vraie sur un voisinage ouvert de p . Or ρ est presque complexe et $\sigma \circ \rho$ est anti-presque complexe ce qui est impossible. \square

Corollaire 1.3.1 *Soit (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') deux surfaces conformes, $((\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}), f, \sigma)$ et $((\tilde{\mathcal{S}}', \tilde{\phi}'), f', \sigma')$ leurs doubles presque complexes respectifs. Si $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un morphisme conforme non constant, alors il existe un unique morphisme presque complexe équivariant $\tilde{g} : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}', \tilde{\phi}')$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{\mathcal{S}}' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{g} & \mathcal{S}' \end{array}$$

De plus si $g : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}', \varphi')$ et $h : (\mathcal{S}', \varphi') \rightarrow (\mathcal{S}'', \varphi'')$ sont deux morphismes conformes non constants, alors $h \circ g = \tilde{h} \circ \tilde{g}$

Preuve: $g \circ f : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}', \tilde{\phi}')$ est un morphisme presque complexe. On applique le théorème précédent et on obtient un unique morphisme $\tilde{g} : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{S}}', \tilde{\phi}')$ tel que $f' \circ \tilde{g} = g \circ f$.

Si $p \in \tilde{\mathcal{S}}$, on a $f(p) = f(\sigma \cdot p)$, d'où $f' \circ \tilde{g}(\sigma \cdot p) = g \circ f(\sigma \cdot p) = g \circ f(p) = f' \circ \tilde{g}(p)$. Donc $\tilde{g}(\sigma \cdot p) = \tilde{g}(p)$ ou bien $\tilde{g}(\sigma \cdot p) = \sigma' \cdot \tilde{g}(p)$. Si $\tilde{g}(\sigma \cdot p) = \tilde{g}(p)$, alors par continuité, il existe un voisinage V de p tel que $\tilde{g} \circ \sigma = \tilde{g}$, ce qui est impossible puisque \tilde{g} est presque complexe et $\tilde{g} \circ \sigma$ est anti-presque complexe. Donc $\tilde{g} \circ \sigma = \sigma' \circ \tilde{g}$ et \tilde{g} est équivariant.

La deuxième partie du corollaire est une conséquence évidente de l'unicité. \square

Proposition 1.3.2 *Si \mathcal{S} une surface conforme (connexe) alors $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi})$ est non connexe si et seulement si \mathcal{S} est orientable et $\partial\mathcal{S} = \emptyset$.*

Une telle surface conforme sera dite *surface conforme non géométriquement irréductible*. Les autres surfaces conformes connexes et compactes seront dites *géométriquement irréductibles*. L'ensemble des surfaces conformes géométriquement irréductibles et celui des surfaces conformes non géométriquement irréductibles munies des morphismes conformes forment une sous catégorie pleine de la catégorie des surface conformes.

Preuve: Supposons tout d'abord \mathcal{S} orientable avec $\partial\mathcal{S} = \emptyset$. D'après le théorème 1.5, φ induit sur \mathcal{S} deux structures presque complexes ϕ_1 et ϕ_2 . Dans la construction du double presque complexe (théorème 1.8), on choisit ϕ_p et ϕ'_p de sorte que $\phi_p = \phi_1|_{U_p}$ et $\phi'_p = \phi_2|_{U_p}$. Alors les identifications de type (b) ont lieu uniquement entre des V_p et V_q ou des V'_p et V'_q . Aucune n'est réalisée entre

V_p et V'_q . Comme $\partial\mathcal{S} = \emptyset$, aucune identification de type (a) n'a lieu. Il en résulte que $\tilde{\mathcal{S}}$ a deux composantes connexes : les images par π de $\bigcup_{p \in \mathcal{S}} V_p$ et $\bigcup_{p \in \mathcal{S}} V'_p$.

Réciproquement, supposons $\tilde{\mathcal{S}}$ non connexe. Comme $f : (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}) \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ est un double revêtement non ramifié et \mathcal{S} est connexe, $\tilde{\mathcal{S}}$ a deux composantes \mathcal{X} et \mathcal{X}' . Chacune d'elles est bijection presque complexe avec \mathcal{S} par f . Puisque $\tilde{\mathcal{S}}$ est orientable et sans bord, il en va de même pour \mathcal{X} et \mathcal{X}' et donc aussi pour $\mathcal{S} = f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}')$. \square

Proposition 1.3.3 *Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme et $((\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\phi}), f, \sigma)$ son double complexe. Alors*

(i) *les caractéristiques d'Euler vérifient : $\chi(\tilde{\mathcal{S}}) = 2 \cdot \chi(\mathcal{S})$*

(ii) *les genres vérifient : $g(\tilde{\mathcal{S}}) = \begin{cases} 2g(\mathcal{S}) + c(\mathcal{S}) - 1 & \text{si } \mathcal{S} \text{ est orientable,} \\ g(\mathcal{S}) + c(\mathcal{S}) - 1 & \text{si } \mathcal{S} \text{ n'est pas orientable.} \end{cases}$*

$c(\mathcal{S})$ désignant le nombre de composantes connexe de $\partial\mathcal{S}$.

Preuve : $\tilde{\mathcal{S}}$ est construite de sorte qu'une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{S} peut être remontée en une triangulation \mathcal{T}' de $\tilde{\mathcal{S}}$. Soit β , le nombre de 0-simplexes de \mathcal{T}' dans les composantes connexes \mathcal{C} de $\partial\tilde{\mathcal{S}}$ tel que $f|_{f^{-1}(\mathcal{C})} : f^{-1}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ soit une bijection. Si on note n_i (resp. m_i), le nombre de i -simplexes de \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}'), on obtient les égalités :

$$m_2 = 2n_2, \quad m_1 = 2n_1 - \beta, \quad m_0 = 2n_0 - \beta$$

D'où le résultat (i).

Comme $\tilde{\mathcal{S}}$ est orientable et $\partial\tilde{\mathcal{S}} = \emptyset$, on a $g(\tilde{\mathcal{S}}) = (2 - \chi(\tilde{\mathcal{S}}))/2 = 1 - \chi(\mathcal{S})$. Alors l'affirmation (i) nous donne le résultat (ii). \square

Soit (\mathcal{S}, φ) est une surface conforme de genre g et de type $\tau = \pm c$. On appellera *genre complexe* et on notera $\tilde{g}(g, \tau)$ le genre du double complexe de (\mathcal{S}, φ) . C'est une fonction de g et de τ :

$$\tilde{g}(g, \tau) = \begin{cases} 2g + c - 1 & \text{si } \tau = +c \\ g + c - 1 & \text{si } \tau = -c \end{cases} \quad (1.3)$$

d'après le (ii) de la proposition 1.3.3 précédente.

1.3.2 Quotient de surface conforme

Actions de groupe

Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés concernant les actions de groupes sur les espaces topologiques séparés.

Soit G un groupe agissant sur un espace topologique séparé \mathcal{E} . Pour $p \in \mathcal{E}$, on notera $Gp = \{g \cdot p \mid g \in G\} \subseteq \mathcal{E}$ l'orbite de p pour G et $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\} \subseteq \mathcal{E}$ le stabilisateur de p dans G .

- (i) G agit librement sur \mathcal{E} si tout point $p \in \mathcal{E}$ a un stabilisateur trivial, i.e. $G_p = \{id\}$ pour tout $p \in \mathcal{E}$.
- (ii) G agit discontinûment sur \mathcal{E} si tout point $p \in \mathcal{E}$ possède un voisinage U tel que $G_U = \{g \in G \mid U \cap g \cdot U \neq \emptyset\}$ soit fini.
- (iii) G agit proprement discontinûment sur \mathcal{E} si :
 - a) G agit discontinûment sur \mathcal{E} ,
 - b) tout $p \in \mathcal{E}$ admet un voisinage ouvert U stable par G_p tel que $U \cap g \cdot U = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus G_p$

Proposition 1.3.4 *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) G agit discontinûment;
- (2) pour tout $p \in \mathcal{E}$, le stabilisateur G_p de p est fini et l'orbite Gp de p est discrète dans \mathcal{E} .

Preuve: (2) \Rightarrow (1): Soit $p \in \mathcal{E}$. Gp étant discrète dans un espace séparé, il existe un voisinage ouvert U de p tel que pour tout $g \in G \setminus G_p$, $g \cdot U \cap U = \emptyset$. Donc $G_U = G_p$ qui est fini par hypothèse.

(1) \Rightarrow (2): Soit $p \in \mathcal{E}$. Il existe un voisinage ouvert U de p tel que G_U soit fini. Donc $G_p \subseteq G_U$ est fini. Comme \mathcal{E} est un espace séparé et que $G_U \setminus G_p = \{g_1, \dots, g_k\}$ est fini, il existe des voisinages ouverts $U_0 \subseteq U$ de p et U_i de g_i avec $g_i^{-1} \cdot U_i \subseteq U$ pour $i = 1$ à k , tels que $U_0 \cap U_i = \emptyset$. Alors $U_p = U_0 \cap \bigcap_{i=1}^k g_i^{-1} \cdot U_i$. U_p est un voisinage ouvert de p et, par construction, on a $g \cdot U_p \cap U_p = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus G_p$. Donc l'orbite Gp de p est discrète dans \mathcal{E} . \square

Théorème 1.9 *Si G agit proprement discontinûment sur \mathcal{E} , alors le quotient \mathcal{E}/G est séparé (pour la topologie quotient).*

Preuve: Soient $[p]$ et $[p']$, deux points distincts de \mathcal{E}/G . Comme $p \notin Gp'$, on peut choisir des voisinages ouverts U et U' de p et p' respectivement, tels que pour tout $g, g' \in G$, on ait $gU \cap g'U' = \emptyset$. Alors les images $V = \pi(U)$ et $V' = \pi(U')$ par l'application quotient $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/G$ sont des voisinages ouverts disjoints de $[p]$ et $[p']$ respectivement. \square

Regardons maintenant les quotient

Théorème 1.10 *Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme et G un sous-groupe d'automorphismes agissant proprement discontinûment et librement sur \mathcal{S} . Alors le quotient \mathcal{S}/G admet une unique structure conforme telle que l'application quotient $\pi : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow \mathcal{S}/G$ soit un morphisme conforme pour cette structure.*

Preuve:

Tout d'abord, il existe une unique structure de variété différentiable sur \mathcal{S}/G faisant de π un difféomorphisme (voir par exemple [KN63]).

Soit $[p] \in \mathcal{S}/G$. Il existe un voisinage ouvert U_p de p , stable par G_p et tel que pour tout $g \in G \setminus G_p$, $g \cdot U_p \cap U_p = \emptyset$. On note alors $V_{[p]} = G \cdot U_p$. C'est un ouvert de \mathcal{S}/G difféomorphe à U_p/G_p . Pour tout $g \in G$, on a $g^* \varphi|_{g \cdot U_p} = \varphi|_{U_p}$. Ceci nous permet de définir une structure conforme $\varphi'_{V_{[p]}}$ sur $V_{[p]}$ comme $\varphi'_{V_{[p]}} = (\pi_p^{-1})^* \varphi|_{U_p}$ avec $\pi_{U_p} = \pi|_{U_p} : U_p \rightarrow V_{[p]}$. Les $\varphi'_{V_{[p]}}$ ainsi définis se recollent en une structure conforme φ' sur \mathcal{S}/G . En effet, soit $[q] \in \mathcal{S}/G$ tel que $V_{[p]} \cup V_{[q]} \neq \emptyset$. Il existe $g \in G$ tel que $g \cdot U_q \cap U_p = U \neq \emptyset$ et $V = \pi(U)$. Alors

$$\varphi'_{V_{[q]}}|_V = (\pi_q^{-1})^* \varphi|_U = ((\pi_p \circ g)^{-1})^* \varphi|_{g^{-1}U} = (\pi_p^{-1})^* ((g^{-1})^* \varphi|_U) = (\pi_q^{-1})^* \varphi|_U = \varphi'_{V_{[q]}}|_V$$

De plus, par construction, $\pi : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}/G, \varphi')$ est une application conforme.

Si φ'' est une autre structure conforme sur \mathcal{S}/G faisant de π un morphisme conforme. Pour $[p] \in \mathcal{S}/G$, soit $\langle \cdot, \cdot \rangle'_{[p]}$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle''_{[p]}$) un produit scalaire représentant $\varphi'_{[p]}$ (resp. $\varphi''_{[p]}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle''$ variant continûment avec $[p]$. On a $\pi^* \varphi' = \pi^* \varphi'' = \varphi$ ce qui signifie qu'il existe $\lambda : \mathcal{S}/G \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue avec $\langle T_{[p]}\pi(x), T_{[p]}\pi(y) \rangle'_{[p]} = \lambda([p]) \langle T_{[p]}\pi(x), T_{[p]}\pi(y) \rangle''_{[p]}$ pour tout $x, y \in T_{[p]}(\mathcal{S}/G)$. Comme π est un difféomorphisme local, il vient $\langle \cdot, \cdot \rangle'_{[p]} = \lambda([p]) \langle \cdot, \cdot \rangle''_{[p]}$ et donc $\varphi' = \varphi''$. \square

On obtient un résultat similaire dans le cas d'une action de Σ sur une surface presque complexe:

Corollaire 1.3.2 *Soit (\mathcal{S}, ϕ) une surface presque complexe munie d'une action de Σ . Il existe une unique structure conforme φ_ϕ sur le quotient \mathcal{S}/Σ faisant de $\pi : (\mathcal{S}, \phi) \rightarrow (\mathcal{S}/\Sigma, \varphi_\phi)$ un morphisme conforme.*

Preuve: L'ensemble des points fixes \mathcal{S}^Σ pour l'action de Σ sur \mathcal{S} est soit vide, soit une sous-variété différentiable de dimension 1 et $\pi(\mathcal{S}^\Sigma) = \partial(\mathcal{S}/\Sigma)$. L'action de Σ sur \mathcal{S} est proprement discontinue et Σ agit de plus librement sur $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^\Sigma$. D'après le théorème 1.10, il existe une unique structure conforme φ_ϕ sur $\mathcal{S}/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}/\Sigma)$ faisant de $\pi|_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^\Sigma} : \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^\Sigma \rightarrow \mathcal{S}/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}/\Sigma)$ un morphisme conforme.

Cette structure induit une unique structure de surface de Klein sur $\mathcal{S}/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}/\Sigma)$ (cf section 1.2.2). En utilisant le principe de réflexion de Schwarz (Théorème 1.6), on peut prolonger celle-ci

en une structure de surface de Klein sur \mathcal{S}/Σ qui redonnera φ_ϕ sur $\mathcal{S}/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}/\Sigma)$ et la prolongera en une structure conforme sur \mathcal{S}/Σ . \square

Voyons maintenant ce qui se passe au niveau des morphismes.

Proposition 1.3.5 *Soit (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') deux surfaces conformes et G, G' des sous-groupes du groupe des automorphismes de (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') respectivement agissant proprement discontinûment et librement. Supposons que $f : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}', \varphi')$ soit un morphisme conforme tel qu'il existe $\lambda : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe avec pour tous $p \in \mathcal{S}$ et tout $g \in G$, $f(g \cdot p) = \lambda(g) \cdot f(p)$. Alors f induit un morphisme conforme $\hat{f} : \mathcal{S}/G \rightarrow \mathcal{S}'/G'$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{S}/G & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{S}'/G' \end{array}$$

où $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$ et $\pi' : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'/G'$ sont les morphismes conformes quotients.

Preuve: Soit $f' = \pi' \circ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'/G'$. C'est un morphisme conforme tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $g \in G$, on a : $f'(g \cdot p) = \pi'(f(g \cdot p)) = \pi'(\lambda(g) \cdot f(p)) = \pi'(f(p)) = f'(p)$. Par la propriété universelle du quotient, il existe un morphisme $\hat{f} : \mathcal{S}/G \rightarrow \mathcal{S}'/G'$ tel que $\hat{f} \circ \pi = f' = \pi' \circ f$. Il reste à voir que \hat{f} est conforme.

Étant donné que f' est différentiable et que π est un difféomorphisme local, on déduit que \hat{f} est différentiable. Notons ψ et ψ' les structures conformes sur \mathcal{S}/G et \mathcal{S}/G' respectivement. Comme f' et π sont conformes, on a $\pi^* \psi = \varphi = f'^* \psi' = \pi^* (\hat{f}^* \psi')$. Par unicité de la structure conforme sur \mathcal{S}/G faisant de π un morphisme conforme (voir théorème 1.10), on en déduit que $\hat{f}^* \psi' = \psi$, donc \hat{f} est conforme. \square

Corollaire 1.3.3 *Soient (\mathcal{S}, ϕ) et (\mathcal{S}', ϕ') des surfaces presque complexes munies d'une action de Σ et $f : (\mathcal{S}, \phi) \rightarrow (\mathcal{S}', \phi')$ un morphisme presque complexe équivariant. Alors f induit un morphisme conforme $\hat{f} : \mathcal{S}/\Sigma \rightarrow \mathcal{S}'/\Sigma$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S}' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathcal{S}/\Sigma & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{S}'/\Sigma \end{array}$$

où $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/\Sigma$ et $\pi' : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'/\Sigma$ sont les morphismes conformes quotients.

Preuve: On construit \hat{f} à l'aide de $f' = \pi' \circ f$ de la même façon que dans la démonstration de la proposition 1.3.5. Il faut maintenant montrer que \hat{f} est conforme.

Le théorème 1.3.5 implique que $\hat{f}|_{\mathcal{S}/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}/\Sigma)} : \mathcal{S}/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}/\Sigma) \rightarrow \mathcal{S}'/\Sigma \setminus \partial(\mathcal{S}'/\Sigma)$ est un morphisme conforme. On montre alors que \hat{f} est conforme de la même façon que l'on avait prolongé la structure conforme φ_ϕ dans la démonstration du corollaire 1.3.2 : on utilise l'équivalence entre surfaces de Klein et surfaces conformes (cf. section 1.2.2) et le principe de réflexion de Schwarz (Théorème 1.6). \square

1.3.3 Surfaces conformes et surfaces de Riemann

Surfaces conformes non géométriquement irréductibles

D'après le théorème 1.5, toute surface de Riemann est une surface conforme et même une surface conforme non géométriquement irréductible d'après la proposition 1.3.2. De plus, si $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est un morphisme de surface de Riemann, f est conforme pour la structure induite. De même si

f est un morphisme antianalytique, f est conforme pour la structure induite (proposition 1.1.10). On obtient donc la

Proposition 1.3.6 *La catégorie des surfaces de Riemann peut être vue comme une sous-catégorie non pleine de la catégorie des surfaces conformes non géométriquement irréductibles.*

Réciproquement, si (\mathcal{S}, φ) est une surface conforme non géométriquement irréductible, le théorème 1.5 nous donne deux structures complexes sur \mathcal{S} donc deux structures de surface de Riemann. En choisir une revient à choisir une orientation sur \mathcal{S} . Si $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est un morphisme de surface conforme non géométriquement irréductible, en utilisant la proposition 1.1.10, on voit qu'on peut choisir les structures de surface de Riemann \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' sur \mathcal{S} et \mathcal{S}' respectivement, de sorte que $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ soit un morphisme holomorphe.

Surfaces conformes géométriquement irréductibles

A toute surface conforme (\mathcal{S}, φ) , on peut associer son double complexe $(\tilde{\mathfrak{S}}, f, \sigma)$ (voir section 1.3.1). Par construction de celui-ci, on a $(\mathcal{S}, \varphi) \simeq (\tilde{\mathfrak{S}}/\Sigma, \varphi_{\tilde{\mathfrak{S}}})$. De plus, tout morphisme $f : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}', \varphi')$ de surface conforme géométriquement irréductible induit un morphisme équivariant $\tilde{f} : \tilde{\mathfrak{S}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{S}'}$ entre les doubles complexes.

Réciproquement, soit \mathfrak{S} est une surface de Riemann munie d'une action de Σ . En utilisant le corollaire 1.3.2 et la correspondance bijective entre surface de Riemann et surface presque complexe (section 1.1.1), on obtient une structure de variété conforme $(\mathcal{S}/\Sigma, \varphi_{\mathfrak{S}})$ sur \mathcal{S}/Σ . De plus, $\mathfrak{S} \simeq \tilde{\mathfrak{S}}/\Sigma$. Maintenant, soit \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' , deux surfaces de Riemann munies d'une action de Σ et $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ un morphisme équivariant. Le corollaire 1.3.3 et la correspondance bijective entre surface presque complexe et surface de Riemann nous donnent alors un morphisme conforme $f_{\Sigma} : \mathcal{S}/\Sigma \rightarrow \mathcal{S}'/\Sigma$.

Ainsi nous avons obtenu un foncteur de la catégorie des surfaces conformes non géométriquement irréductibles dans la sous-catégorie des surfaces de Riemann munie d'une action de Σ avec morphismes équivariants, donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{S}, \varphi) \mapsto \tilde{\mathfrak{S}} \\ f : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{S}', \varphi') \mapsto \tilde{f} : \tilde{\mathfrak{S}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{S}'} \end{array} \right.$$

ainsi qu'un foncteur de la sous-catégorie des surfaces de Riemann munie d'une action de Σ avec morphismes équivariants dans celle des surfaces conformes géométriquement irréductibles donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S} \mapsto (\mathcal{S}/\Sigma, \varphi_{\mathfrak{S}}) \\ f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}' \mapsto f_{\Sigma} : (\mathcal{S}/\Sigma, \varphi_{\mathfrak{S}}) \rightarrow (\mathcal{S}'/\Sigma, \varphi_{\mathfrak{S}'}) \end{array} \right.$$

Ces deux foncteurs sont inverse l'un de l'autre ce qui nous donne la

Proposition 1.3.7 *Il existe une bijection entre la catégorie des surface conformes géométriquement irréductibles et la sous-catégorie des surfaces de Riemann munie d'une action de Σ avec morphisme équivariant. Cette bijection associe à une surface conforme géométriquement irréductible son double complexe et envoie une surface de Riemann munie d'une action de Σ sur son quotient par Σ munie de la structure conforme faisant de l'application quotient un morphisme conforme.*

Chapitre 2

Uniformisation

2.1 Du coté des groupes cristallographiques non-euclidiens

Cette section s'inspire principalement des résultats de [BEGG90].

2.1.1 Automorphismes de \mathbb{H}

Le mot "automorphisme" désignera ici les automorphismes conformes. On utilisera l'expression "automorphisme analytique" lorsqu'il sera question d'automorphisme pour une surface analytique.

Demi-plan de Poincaré et disque unité...

On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, le disque unité ouvert dans \mathbb{C} . En tant qu'ouverts de \mathbb{C} , ils sont naturellement munis d'une structure de surfaces analytiques sans bord induite par l'atlas analytique trivial $\{(U, \mathfrak{z} = id)\}$. Ce sont donc aussi des surfaces conformes sans bord (non compacte).

Proposition 2.1.1 Soit $\begin{cases} h_C(z) = \frac{z-i}{z+i} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{i\}) \\ h_{C'}(z) = \frac{z+1}{iz-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \end{cases}$ les morphismes de Cayley.

Alors $h_C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ est biholomorphe d'inverse $h_{C'} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$.

Ce biholomorphisme entre \mathbb{H} et \mathbb{D} va nous permettre de déterminer les automorphismes de \mathbb{H} à l'aide des automorphismes analytiques de \mathbb{D} , $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})$. Mais tout d'abord, nous avons besoin des résultats suivants :

Lemme 2.1.1 (Schwarz)

Toute application holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ avec $f(0) = 0$ vérifie :

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}, \quad \text{et} \quad |f'(0)| \leq 1$$

Si il existe au moins un point $c \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(c)| = |c|$, ou si $|f'(0)| = 1$, alors f est une rotation de centre 0, i.e. il existe $a \in S^1$ tel que :

$$f(z) = a.z \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Preuve: $f(0) = 0$ signifie que g définie par :

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad g(0) = f'(0)$$

est une fonction holomorphe dans \mathbb{D} . Comme $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$, avec $0 < r < 1$. Donc d'après le principe du maximum, $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour tout $z \in B(0, r)$. En faisant tendre r vers 1, on obtient $|g(z)| \leq 1$ c'est à dire $|f(z)| \leq |z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Dans le cas où $|f(c)| = |c|$ pour un certain $c \in \mathbb{D}$ (resp. $f'(o) = 1$), on a $g(c) = 1$ (resp. $g(0) = 1$). Cela signifie que g atteint son maximum dans \mathbb{D} . D'après le principe du maximum, g est alors constant, égal à un certain $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. \square

Corollaire 2.1.1 *Tout automorphisme analytique $f \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})$ tel que $f(0) = 0$ est une rotation centrée en 0 :*

$$\text{Aut}_{\mathbb{C},0}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto f(z) = a.z \mid a \in S^1\}$$

Preuve: Toutes les rotations centrées en 0 sont dans $\text{Aut}_{\mathbb{C},0}(\mathbb{D})$.

Réciproquement, si $f \in \text{Aut}_{\mathbb{C},0}(\mathbb{D})$, alors f^{-1} aussi. D'après le lemme de Schwarz,

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Donc d'après la deuxième partie du lemme de Schwarz, il existe $a \in S^1$ tel que $f(z) = a.z \forall z \in \mathbb{D}$. \square

Proposition 2.1.2 $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{bz+\bar{a}} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$

Preuve: Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$, l'application $f_{a,b} : z \mapsto \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ est holomorphe en tout point $z \neq -\frac{\bar{a}}{b}$ si $b \neq 0$. De plus $f_{a,b}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ et $f_{a,b} \circ f_{\bar{a},-b} = \text{id}$, donc $f_{a,b}$ est un automorphisme analytique de \mathbb{D} .

Réciproquement, soit $f \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})$. Montrons que f est de la forme $f_{a,b}$ pour certains $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Si $z_0 = f^{-1}(0)$, alors $f_{1,z_0}(0) = z_0$ et $f \circ f_{1,z_0}(0) = 0$. Comme f et f_{1,z_0} sont des automorphismes analytiques de \mathbb{D} il en va de même pour $f \circ f_{1,z_0}$. Donc d'après le corollaire 2.1.1 au lemme de Schwarz, $f \circ f_{1,z_0}$ est une rotation centrée en 0. Il existe alors $\alpha \in [0, 1[$ tel que $f \circ f_{1,z_0}(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Si on pose $a = \frac{e^{i\pi\alpha}}{\sqrt{1-|z_0|^2}}$ et $b = -\frac{z_0 e^{i\pi\alpha}}{\sqrt{1-|z_0|^2}}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$ et $f = f_{a,b}$. \square

Retour sur les automorphismes de \mathbb{H}

Commençons par un corollaire à la proposition 2.1.2 précédente.

Corollaire 2.1.2 $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{R}) \right\}$

Preuve: D'après la proposition 2.1.1, l'application $h \mapsto h_{C'} \circ h \circ h_C$ est un isomorphisme de groupe de $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})$ dans $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$.

Soit $a = x_a + iy_a, b = x_b + iy_b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$ et $f_{a,b} \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D})$. On a $h_{C'} \circ f_{a,b} \circ h_C(z) = \frac{(x_a+x_b)z+y_a-y_b}{x_a-x_b-(y_a+y_b)z} \forall z \in \mathbb{H}$ et $\begin{pmatrix} x_a+x_b & y_a-y_b \\ -y_a-y_b & x_a-x_b \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{R})$ et $f_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Si on note $\alpha = \frac{a+d+i(b-c)}{2}$ et $\beta = \frac{a-d-i(b+c)}{2}$, alors $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ et on a $h_{C'} \circ f_{\alpha,\beta} \circ h_{C'} = f_A$.

Donc $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) = \{h_{C'} \circ f_{a,b} \circ h_C \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 - |b|^2 = 1\} = \{f_A \mid A \in \text{Sl}_2(\mathbb{R})\}$ \square

A une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$, on associe l'automorphisme $f_A \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ suivant :

$$f_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{si } \det A > 0 \\ \frac{\bar{a}z+b}{\bar{c}z+d}, & \text{si } \det A < 0 \end{cases}$$

On remarque que $f_A = f_{r.A}$ pour tout réel r non nul. Donc l'application $A \in \text{Gl}_2(\mathbb{R}) \mapsto f_A \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ induit une application de $\text{PGL}_2(\mathbb{R}) = \text{Gl}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\text{Aut}(\mathbb{H})$ donnée par $[A] \in \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \mapsto f_A \in \text{Aut}(\mathbb{H})$.

Théorème 2.1 *L'application $[A] \in \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \mapsto f_A \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ est une bijection. En particulier, le groupe $\text{Aut}(\mathbb{H})$ est un groupe topologique.*

Preuve: Surjectivité: Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Deux cas se présentent selon que f préserve ou non l'orientation.

- Si f préserve l'orientation, alors f est holomorphe donc $f \in \text{Aut}_C(\mathbb{H})$. D'après le corollaire 2.1.2, f est de la forme f_A avec $A \in \text{Sl}_2(\mathbb{R})$.

- Si f renverse l'orientation, alors $\hat{f} : z \mapsto -\overline{f}(z)$ est un automorphisme de \mathbb{H} préservant l'orientation donc de la forme f_A avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{R})$. Donc, f est de la forme $-\overline{f_A}$. Si on pose $A' = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det A' = -\det A < 0$ et $f = f_{A'}$.

Injectivité: Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$ l'égalité $f_A = f_{A'}$ induit le système :

$$\begin{cases} ac' = a'c \\ bc' + d'a = b'c + da' \\ bd' = b'd \end{cases}$$

Qui a pour solution $a = ra'$, $b = rb'$, $c = rc'$ et $d = rd'$ avec $r \in \mathbb{R}$ non nul. Donc $[A] = [A']$. \square

On a de plus les propriétés suivantes:

Proposition 2.1.3

(a) Les sous-groupes conjugués de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ sont homéomorphes.

(b) L'application $(f, z) \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \times \mathbb{H} \mapsto f(z) \in \mathbb{H}$ est continue.

Remarque: On peut étendre de façon naturelle chaque $f_A \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$, en un automorphisme \tilde{f}_A de $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$:

$$\tilde{f}_A : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

$$z \mapsto \begin{cases} -\frac{d}{c}, & \text{si } z = \infty \\ \infty, & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{az+b}{cz+d}, & \text{si } z \notin \{\infty, -\frac{d}{c}\} \text{ et } \det A > 0 \\ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, & \text{si } z \notin \{\infty, -\frac{d}{c}\} \text{ et } \det A < 0 \end{cases}$$

Sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{H})$

Un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ est dit *discret* s'il est discret en temps que sous-espace topologique de $\text{Aut}(\mathbb{H})$.

Les sous-groupes discrets de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ sont des exemples de groupes agissant proprement discontinûment sur \mathbb{H} . Pour le voir, nous avons besoin du

Lemme 2.1.2 Soit Γ un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ tel que $f_n \neq f_m$ si $m \neq n$.

(1) Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, alors $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$;

(2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = z'$ pour certains $z, z' \in \mathbb{H}$, alors Γ n'est pas discret.

Preuve:

(1) est immédiat par continuité de $(f, z) \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \times \mathbb{H} \mapsto f(z) \in \mathbb{H}$ (proposition 2.1.3).

(2) Cherchons $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ tel que $g(i) = z = x + iy$. Comme $y > 0$, on peut trouver des réels c et d tels que $(c^2 + d^2)y = 1$. Si on pose $a = cx + dy$ et $b = dx - cy$, alors $ad - bc = 1$ et $g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est un automorphisme de \mathbb{H} tel que $g(i) = z$.

On pose maintenant $h_n = g^{-1}f_n g \in g^{-1}\Gamma g = \Gamma'$. Par continuité de g^{-1} , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(i) = g^{-1}(z') = w \in \mathbb{H}$. Si on note $h_n = h_{A_n}$ avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, alors $|\Im h_n(i)| = \frac{1}{c_n^2 + d_n^2}$ et $|h_n(i)| = \frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2}$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n^2 + d_n^2} = \Im w$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2} = |w|$. On en déduit que les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ et $\{d_n\}$ sont bornées dans \mathbb{R} , donc admettent des sous-suites convergentes. Celles-ci induisent une sous-suite $\{h_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma'$ convergeant vers un certain $h \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Ainsi Γ' , donc Γ , n'est pas discret. \square

Proposition 2.1.4 Tout sous-groupe discret de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} .

Preuve:

- Pour tout $z \in \mathbb{H}$, le stabilisateur Γ_z de z dans Γ est fini. Sinon, on considère $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma_z$ avec $f_n \neq f_m$ pour $n \neq m$. Alors $z = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ ce qui contredit le lemme 2.1.2.

- On note $N = N_z = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{z,n} = \mathcal{B}(z, 1/n) \subseteq \mathbb{H}\}$ et $\Gamma_n = \Gamma_{z,n} = \{g \in \Gamma \mid g\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_n \neq \emptyset\}$ pour $n \in N$. Alors $\Gamma_z = \bigcap_{n \in N} \Gamma_n$. En effet, on a déjà que $\Gamma_z \subseteq \bigcap_{n \in N} \Gamma_n$. Maintenant, si $f \notin \Gamma_z$, il existe des voisinages ouverts U de z et U' de $f(z)$ tels que $U \cap U' = \emptyset$. Pour $n \in N$ assez grand, $\mathcal{B}_n \subseteq U$ et $f(\mathcal{B}_n) \subseteq U'$, donc $f \notin \Gamma_n$.

- Ceci nous permet de prouver :

(1) Γ agit discontinûment sur \mathbb{H} :

Soit $z \in \mathbb{H}$. Supposons que chaque Γ_m soit infini. Comme Γ_z est fini et d'après l'égalité ci-dessus, $\Gamma_{m_1} \supsetneq \Gamma_{m_2} \supsetneq \dots$ pour une certaine suite $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$. On choisit alors pour chaque k un automorphisme $f_k \in \Gamma_{n_k} \setminus \Gamma_{n_{k+1}}$. Par construction, $f_k \neq f_l$ si $l \neq k$. On prend aussi pour tout k , $z_k \in \mathcal{B}_{n_k} \cap f_k(\mathcal{B}_{n_k})$ et $z'_k \in \mathcal{B}_{n_k}$ tels que $z_k = f_k(z'_k)$. On a $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z = \lim_{k \rightarrow \infty} z'_k$. D'où $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z) = z$ ce qui contredit le fait que Γ soit discret (lemme 2.1.2).

(2) Soient z et $z' \in \mathbb{H}$ deux points tels que $z' \notin Gz$. Il faut trouver des voisinages ouverts U de z et U' de z' tels que pour tout $f, f' \in \Gamma$, on ait $f(U) \cap f'(U') = \emptyset$.

Soit $P = N \cap N'$, avec $N = N_z$ et $N' = N_{z'}$ suivant les notations précédentes. On note aussi $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{z,n}$, $\mathcal{B}'_n = \mathcal{B}_{z',n}$ et $D_n = \{f \in \Gamma \mid f(\mathcal{B}_n) \cap \mathcal{B}'_n \neq \emptyset\}$. Alors $\bigcap_{n \in P} D_n = \emptyset$. En effet, sinon, pour un certain $f \in \Gamma$, il existerait des points $z_n \in \mathcal{B}_n$ et $z'_n \in \mathcal{B}'_n$, pour $n \in P$ tels que $f(z'_n) = z_n$. D'où $f(z') = z$ ce qui est exclu par hypothèse.

Si aucun des D_n n'est vide, il existe une suite $\{D_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $D_{m_1} \supsetneq D_{m_2} \supsetneq \dots$. Comme en (1), on choisit $f_k \in D_{m_k} \setminus D_{m_{k+1}}$ et de la même façon, on obtient $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z') = z$ avec $f_l \neq f_k$ pour $l \neq k$. Ceci contredit à nouveau le lemme 2.1.2. \square

Géométrie non-euclidienne

Les notions données ici sont issues de [Wil66]

On appelle *métrique non-euclidienne* la métrique définie sur \mathbb{H} par $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Celle-ci et l'élément de surface associé sont invariants par action de $\text{Aut}(\mathbb{H})$. \mathbb{H} devient alors un modèle du plan hyperbolique et $\text{Aut}(\mathbb{H})$ le groupe de ses isométries. Les géodésiques, ou *droites non-euclidiennes* sont les cercles ou les demi-droites orthogonaux à l'axe des réels.

Un sous-ensemble $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{H}$ est *convexe* si pour tout couple de points p et $p' \in \mathcal{E}$, un segment de géodésique joignant p à p' est contenu dans \mathcal{E} .

2.1.2 Les groupes C.N.E.

Définition

Soit Γ , un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\mathbb{H})$. On dira que Γ est un *groupe cristallographique non-euclidien* (en abrégé, *groupe C.N.E.*) si l'espace des orbites \mathbb{H}/Γ est compact.

Pour $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ donné, il existe exactement deux matrices $A, B \in \text{Gl}_2(\mathbb{R})$ telles que $f_A = f = f_B$ avec $|\det A| = 1 = |\det B|$. En fait $A = -B$. En particulier, $\det A = \det B$ et $\text{tr} A = -\text{tr} B$. On définit alors le *déterminant de f* comme $\det f = \det B = \det A$ et la *trace de f* comme $\text{tr} f = |\text{tr} A| = |\text{tr} B|$. On appellera *matrice représentant f* celle des deux matrices A et B vérifiant l'équation $\text{tr} X = \text{tr} f$. On a $f \in \text{Aut}^+(\mathbb{H}) = \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ si et seulement si $\det f = 1$.

On dira que f est $\left\{ \begin{array}{ll} - \textit{hyperbolique} & \text{si } \det f = 1 \quad \text{et } \text{tr} f > 2; \\ - \textit{elliptique} & \text{si } \det f = 1 \quad \text{et } \text{tr} f < 2; \\ - \textit{parabolique} & \text{si } \det f = 1 \quad \text{et } \text{tr} f = 2; \\ - \textit{un glissement} & \text{si } \det f = -1 \quad \text{et } \text{tr} f \neq 0; \\ - \textit{une réflexion} & \text{si } \det f = -1 \quad \text{et } \text{tr} f = 0. \end{array} \right.$

Un groupe C.N.E est appelé *groupe fuchsien* si il est inclus dans $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$. Dans le cas contraire, on dit qu'il est un *groupe C.N.E propre*. Si Γ est un groupe C.N.E. propre, le *sous-groupe fuchsien canonique de Γ* est $\Gamma^+ = \Gamma \cap \text{Aut}^+(\mathbb{H})$.

Remarque: Si Γ est un groupe C.N.E. propre, Γ^+ est un sous-groupe distingué d'indice 2.

Proposition 2.1.5 *Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Si on note $\text{Fixe}(f) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \tilde{f}(z) = z\}$, alors :*

$$\text{Fixe}(f) = \begin{cases} \{z_1 \neq z_2\} \subseteq \overline{\mathbb{R}} & \iff \begin{cases} f \text{ est hyperbolique ou} \\ f \text{ est un glissement} \end{cases} \\ z_0 \in \overline{\mathbb{R}} & \iff f \text{ est parabolique} \\ \begin{cases} \text{un cercle ou} \\ \text{une demi-droite orthogonale à } \mathbb{R} \end{cases} & \iff f \text{ est une réflexion} \\ \{z_0 \neq \bar{z}_0\} & \iff f \text{ est elliptique} \end{cases}$$

En particulier, f admet des points fixes comme automorphisme de \mathbb{H} si et seulement si f est elliptique ou f est une réflexion.

Les deux lemmes suivants nous donnent quelque propriétés des éléments de $\text{Aut}(H)$ admettant deux uniques points fixes dans $\overline{\mathbb{R}}$, i.e. les éléments hyperboliques ou les glissements. Afin de simplifier les appellations, de tels éléments seront dit *hyperboliques généraux*

Lemme 2.1.3 *Si $f, f' \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ deux éléments hyperboliques généraux, alors $\text{Fixe}(f) = \text{Fixe}(f')$ si et seulement si f et g commutent.*

Preuve: - Supposons que $f \circ f' = f' \circ f$. On note z_1, z_2 (resp. z'_1, z'_2) les points fixes attractif et répulsif de f (resp. de f'). Pour $i = 1, 2$, on a $f'(z_i) = f(f'(z_i))$, ce qui signifie que $f'(z_i) = z_i$ ou bien que $f'(z_i) = z_j$ pour $i, j = 1$ à 2 et $i \neq j$. Pour $s \in \mathbb{H}$ assez proche de z_1 , la suite $s_0 = s, s_1 = f(s), \dots, s_n = f(s_{n-1}) = f^n(s), \dots$ converge vers z_1 . Or $f'(s_n) = f'(f^n(s)) = f^n(f'(s)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(z_1)$. Donc $f'(z_1)$ est le point attractif de f et $f'(z_i) = z_i$ pour $i = 1, 2$.

- Réciproquement, supposons que z_1 et z_2 sont les deux points fixes de f et f' . Quitte à conjuguer f et f' par un même élément de $\text{Aut}(\mathbb{H})$, on peut supposer $\{z_1, z_2\} = \{0, \infty\}$. Alors f et f' sont de la forme $z \mapsto \lambda z$ ou bien $z \mapsto -\lambda \bar{z}$, selon qu'elles inverse ou non l'orientation. Donc f et f' commutent. \square

Lemme 2.1.4 *Si $f, f' \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ sont deux éléments hyperboliques généraux d'un groupe C.N.E. alors on est dans l'un des deux cas suivants:*

$$(i) \quad \text{Fixe}(f) = \text{Fixe}(f') \quad \text{ou bien} \quad (ii) \quad \text{Fixe}(f) \cap \text{Fixe}(f') = \emptyset$$

Preuve: Si (i) ni (ii) n'est réalisé, quitte à conjuguer f et f' par un élément de $\text{Aut}(\mathbb{H})$, on peut supposer que $\text{Fixe}(f) = \{0, \infty\}$ et $\text{Fixe}(f) \cap \text{Fixe}(f') = \{\infty\}$. Alors f et f' peuvent être représenté matriciellement par $F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ et $F' = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \varepsilon' a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$.

Si on pose $G_n = F' F^{2n} F'^{-1} F^{-2n}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, alors $G_n = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon' a b (1 - \lambda^{4n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si $0 < \lambda < 1$ (resp. $\lambda > 1$), la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(G_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$) converge vers $G = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon' a b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $ab \neq 0$ et $\lambda \notin \{0, 1\}$, tous les G_n sont distincts pour $n \in \mathbb{Z}$. Donc, d'après le lemme 2.1.2, Γ n'est pas discret, ce qui est exclu. \square

Domaines fondamentaux

Soit Γ un groupe C.N.E. Un *domaine fondamental* pour Γ est un sous-ensemble fermé \mathcal{F} de \mathbb{H} tel que :

- (i) pour tout $z \in \mathbb{H}$, il existe $f \in \Gamma$ tel que $f(z) \in \mathcal{F}$;
- (ii) si $z \in \mathbb{H}$ et $f, g \in \Gamma$ vérifient $f(z) = g(z) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$, l'intérieur de \mathcal{F} , alors $f = g$;
- (iii) l'aire non-euclidienne de $\mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ est nulle:

$$\mu(\mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}) = \iint_{\mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}} \frac{dx \, dy}{y^2} = 0$$

Lemme 2.1.5 *Soit Γ un groupe C.N.E. Il existe un point $p \in \mathbb{H}$ tel que le stabilisateur $\Gamma_p = \{f \in \Gamma \mid f(p) = p\}$ soit trivial, i.e. : $\Gamma_p = \{id\}$.*

Preuve: Supposons que le lemme soit faux. Il existe alors une demi-droite $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{H}$, perpendiculaire à \mathbb{R} , telle que $\mathcal{D} \neq \text{Fixe}(f)$ pour tout $f \in \Gamma$. En effet, dans le cas contraire, on choisit une suite $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de \mathbb{H} convergeant vers un point $p \in \mathbb{H}$ et telle que les p_n soient sur une droite parallèle à \mathbb{R} avec la demi-droite \mathcal{D}_n perpendiculaire à \mathbb{R} passant par p_n vérifie $\mathcal{D}_n = \text{Fixe}(f_n)$ pour un certain $f_n \in \Gamma$. Alors $f_n \neq f_m$ pour $n \neq m$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, ce qui contredit le lemme 2.1.2.

On choisit maintenant une suite $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{D} convergeant vers un point $z \in \mathbb{H}$. Par hypothèse, il existe une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Γ distincts deux à deux, tels que $f_n(z_n) = z_n$. De même que précédemment, on obtient une contradiction au lemme 2.1.2. \square

Si Γ est un groupe C.N.E. et $p \in \mathbb{H}$ avec stabilisateur Γ_p trivial (voir lemme 2.1.5), on pose

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_p = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) \leq d(f(z), p) \text{ pour tout } f \in \Gamma\},$$

où $d(z, z')$ est la distance non-euclidienne entre z et z' :

$$d(z, z') = \int_{\mathcal{G}_{z, z'}} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y},$$

$\mathcal{G}_{z, z'}$ étant la géodésique entre z et z' pour le métrique non-euclidienne (voir section 2.1.1).

\mathcal{F}_p est appelé *Domaine de Dirichlet de centre p* .

L'intérieur de \mathcal{F}_p est donné par

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}}_p = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) < d(f(z), p) \text{ pour tout } f \in \Gamma \setminus \{id_{\mathbb{H}}\}\}.$$

Sa frontière est contenue dans la réunion des droites non-euclidiennes \mathcal{D}_f , où

$$\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) = d(g(z), p), g = f^{-1} \in \Gamma\} = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) = d(z, f(p)), f \in \Gamma\}.$$

Ce sont les bissectrices de paires de points de l'orbite de p .

L'intersection de \mathcal{F}_p avec une des \mathcal{D}_f est soit un segment de droite non-euclidienne, soit un point. Ces segments forment les *cotés de \mathcal{F}_p* . Les extrémités de ceux-ci, ainsi que les points seuls, qui peuvent aussi être vu comme extrémité de segments de droite, sont les *sommets de \mathcal{F}_p* .

Lemme 2.1.6 *Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux sous-ensembles compacts de \mathbb{H} et $\Gamma \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H})$ un groupe cristallographique non-euclidien. Alors $\{f \in \Gamma \mid f \cdot \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset\}$ est fini.*

Preuve: Supposons $\{f \in \Gamma \mid f \cdot \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset\}$ infini. Il existe alors des suites $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts deux à deux de Γ , $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{C} et $\{z'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{C}' tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z_n) = z'_n$. Comme \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont compacts, quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que les suites $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{z'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers un certain z et z' respectivement. Alors $z' = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ ce qui contredit le lemme 2.1.2. \square

Proposition 2.1.6 *\mathcal{F}_p est un polygone convexe (pour la métrique non-euclidienne) avec un nombre fini de cotés.*

Preuve: Comme \mathbb{H}/Γ est compacte, il existe un compact $\mathcal{C}_p \subseteq \mathbb{H}$ tel que $p \in \mathcal{C}_p$ et \mathcal{C}_p contient au moins un point de l'orbite Γz pour tout $z \in \mathbb{H}$. Ainsi, \mathcal{F}_p est contenue dans une boule non-euclidienne de centre p et puisque \mathcal{F}_p est fermé, il est compact. D'après la proposition 2.1.6, \mathcal{F}_p a une intersection non vide avec un nombre fini de ses images par des éléments de Γ . Ainsi, les inégalités définissant l'intérieur de \mathcal{F}_p sont la conséquence d'un nombre fini d'entre elles et \mathcal{F}_p est un polygone non-euclidien convexe ayant un nombre fini de cotés. \square

Théorème 2.2 *\mathcal{F}_p est un domaine fondamental pour Γ .*

En particulier, tout groupe C.N.E. admet un domaine fondamental.

Preuve: (i) Soit $z \in \mathbb{H}$. Comme Γ est discret, l'orbite Γz de z est fermée. Donc il existe $z_0 \in \Gamma z$ tel que $d(z_0, p) \leq d(z', p)$ pour tout $z' \in \Gamma z$. Alors $z_0 = f(z)$ pour un certain $f \in \Gamma$ et pour ce f , on a $f(z) \in \mathcal{F}_p$.

(ii) Soit $z \in \mathbb{H}$ et $f, g \in \Gamma$ tels que $f(z), g(z) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_p$. Si $f \neq g$,

$$d(f(z), p) < d(gf^{-1}(f(z)), p) = d(g(z), p) < d(fg^{-1}(g(z)), p) = d(f(z), p),$$

ce qui est impossible. Donc $f = g$.

(iii) Le résultat vient du fait que Γ est discret et $\mathcal{F}_p \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}_p \subseteq \bigcup_{f \in \Gamma} \mathcal{D}_f$. \square

La proposition suivante [BEGG90, Wil66] donne plusieurs propriétés de \mathcal{F}_p .

Proposition 2.1.7 Domaine régulier

- (1) \mathcal{F}_p est homéomorphe au disque fermé.
- (2) La frontière de \mathcal{F}_p est une courbe de Jordan polygonale, i.e. une courbe qui est une réunion finie de segments non-euclidiens.
- (3) Il existe un nombre fini de points sur la frontière de \mathcal{F}_p appelés les sommets de \mathcal{F}_p , divisant la frontière en arcs de Jordan appelés les cotés de \mathcal{F}_p .
- (4) Les cotés de \mathcal{F}_p sont classés de la façon suivante :
 - (4. 1) Paires (c, c') où $c = \mathcal{F}_p \cap f \cdot \mathcal{F}_p$ et $c' = \mathcal{F}_p \cap f^{-1} \cdot \mathcal{F}_p$ pour un certain $f \in \Gamma$ avec $f^2 \neq id_{\mathbb{H}}$,
 - (4. 2) paires (c, c') telles qu'il existe une transformation elliptique $f \in \Gamma$ d'ordre 2 avec $c \cup f \cdot c = \mathcal{F}_p \cap f \cdot \mathcal{F}_p$,
 - (4. 3) $c = \mathcal{F}_p \cap f \cdot \mathcal{F}_p$ où $f \in \Gamma$ est une réflexion;

Dans les deux premiers cas, $c' = f \cdot c$, $c = f^{-1} \cdot c'$ et on dit que c et c' sont congruents. Dans le dernier cas, c est congruent à aucun autre coté.
- (5) Si $f \in \Gamma$, $\mathcal{F}_p \cap f \cdot \mathcal{F}_p \neq \emptyset$ avec $\mathcal{F}_p, f \cdot \mathcal{F}_p$ sans coté en commun, alors comme \mathcal{F}_p est convexe, $\mathcal{F}_p \cap g \cdot \mathcal{F}_p$ a un seul sommet.

Un domaine fondamental ayant les propriétés de la proposition 2.1.7 est dit *régulier*. En particulier, le domaine fondamental \mathcal{F}_p construit précédemment est régulier.

2.1.3 Mettons un peu d'ordre

Symbole surfacique

Soit \mathcal{F} un domaine fondamental régulier pour Γ , un groupe C.N.E. Si $f \in \Gamma$, on appelle $f\mathcal{F}$ une *face* et deux faces ayant un coté en commun sont dites *voisines*. Par définition, l'application $f \in \Gamma \mapsto f\mathcal{F} \in \{\text{faces}\}$ est une bijection et $\mathbb{H} = \bigcup_{f \in \Gamma} f\mathcal{F}$.

Soit c un coté de \mathcal{F} . Il existe un unique $f_c \in \Gamma$ tel que $c = f_c \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$. On a la

Proposition 2.1.8 $\{f_c \mid c \text{ est un coté de } \mathcal{F}\}$ est un ensemble générateur de Γ .

Preuve: Soit $f \in \Gamma$. Il existe une suite $f_1 = id_{\mathbb{H}}, f_2, \dots, f_{n+1} = f$ d'éléments de Γ tels que $f_i \mathcal{F}$ et $f_{i+1} \mathcal{F}$ se rencontrent en un coté $f_i(c_i)$ de $f_i \mathcal{F}$ où c_i est un coté de \mathcal{F} : $f_i(c_i) = f_i \mathcal{F} \cap f_{i+1} \mathcal{F}$. En effet, $f\mathcal{F} \cup \mathcal{F}$ est compact donc contenu dans une boule non-euclidienne \mathcal{B} . Comme $\mathbb{H} = \bigcup_{g \in \Gamma} g\mathcal{F}$ et que \mathcal{B} est compacte, il existe un recouvrement fini $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k g_i \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ avec $g_1 = id_{\mathbb{H}}$ et $g_k = f$. De proche en proche, on peut trouver une suite $f_1 = id_{\mathbb{H}}, f_2, \dots, f_{n+1} = f$ d'éléments de $\{g_i \mid i = 1 \text{ à } k\}$ vérifiant ce que l'on veut.

On a alors $f_i(f_{c_i} \mathcal{F}) = f_{i+1} \mathcal{F}$ et par bijectivité de $f \in \Gamma \mapsto f\mathcal{F} \in \{\text{faces}\}$, $f_{i+1} = f_i f_{c_i}$ pour $i = 1$ à n . D'où $f = f_{c_1} \dots f_{c_n}$ pour certains cotés c_1, \dots, c_n de \mathcal{F} . \square

A. Étiquetage des cotés

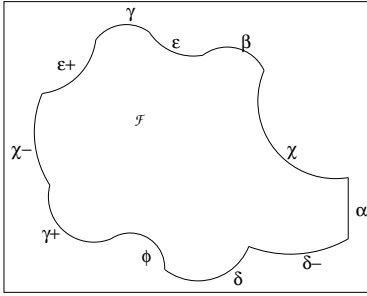


FIG. 2.1 – Étiquetage

On étiquette dans un premier temps les sommets de type (43) (proposition 2.1.7) puis les paires $(c, c' = f \cdot c)$ de sommets congruents (type (41) et (42)). Si $f \in \Gamma^+$, c' sera noté c^+ , sinon c' sera noté c^- . On écrit alors les étiquettes dans le sens trigonométrique afin d'obtenir le *symbole surfacique du domaine fondamental* \mathcal{F} . Par exemple, celui de la figure 2.1 ci-contre est :

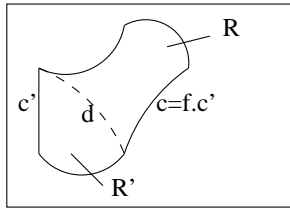
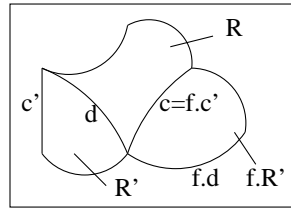
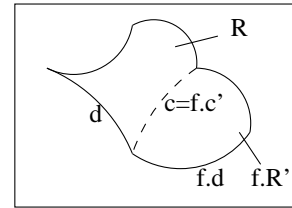
$\alpha \chi \beta \epsilon \gamma \epsilon^+ \chi^- \gamma^+ \phi \delta \delta^-$.

Le symbole surfacique déterminera la structure topologique de \mathbb{H}/Γ .

B. Construction d'un nouveau domaine fondamental

Il est possible de modifier un domaine fondamental \mathcal{F} de Γ :

Soit $(c, c' = f(c))$ une paire de cotés congruents et d un segment non-euclidien joignant deux sommets de \mathcal{F} de sorte que d partage \mathcal{F} en deux régions R et R' avec $c \in R$ et $c' \in R'$. Alors $\mathcal{F}' = R \cup fR'$ est un autre domaine fondamental pour Γ , ayant les deux cotés congruents d et $d' = f(d)$ au lieu de c et c' .

(a) Domaine de départ:
 $\mathcal{F} = R \cup R'$ (b) Les trois régions:
 R, R' et fR' (c) Nouveau domaine:
 $\mathcal{F}' = R \cup fR'$ FIG. 2.2 – Découpage du domaine fondamental \mathcal{F}

Ces manipulations agissent sur le symbole surfacique de la façon suivante:

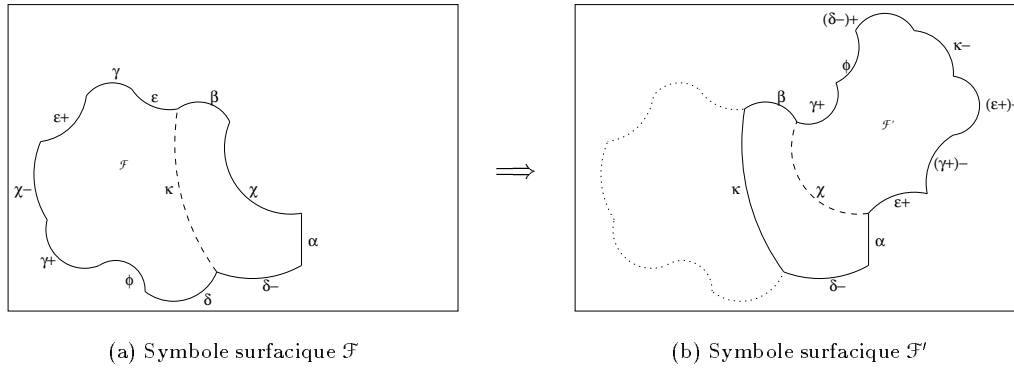
Soit $A c B P c' Q D$ le symbole surfacique de \mathcal{F} , les lettres capitales A, B, D, P et Q désignant des suites finies, éventuellement vides, d'étiquettes. On considère un arc de Jordan k joignant le sommet entre B et P à celui situé entre Q et D . Le symbole surfacique du nouveau domaine fondamental obtenu est $A Q k P B k^+ D$ si $c' = c^+$ ou $A P' k Q' B k^- D$ si $c' = c^-$. P' et Q' sont obtenus en réétiquetant p et q comme suit :

- Si $e \in PQ$ est un coté de type (43) dans la proposition 2.1.7, il reste inchangé.
- Si b et/ou $b' \in PQ$ est un coté de type (41) ou (42) dans la proposition 2.1.7, avec $b' = b^+$ ou b^- , plusieurs cas se présentent :
 - $(b, b') \in PQ$: on remplace b par $(b^+)^-$ si $b' = b^+$ et par $(b^-)^+$ sinon.
 - $b \notin PQ$ et $b' \in PQ$: on échange les étiquettes b et b' .
 - $b \in PQ$ et $b' \notin PQ$: les étiquettes ne sont pas modifiées.

P' (resp. Q') est alors obtenu en inversant l'ordre des étiquettes de P (resp. Q).

La figure 2.3 montre ce que l'on peut obtenir dans le cas du domaine de la figure 2.1:

Ici, l'arc de Jordan le long duquel on va "découper" le symbole surfacique relie le sommet entre ϵ et β à celui entre δ^- et δ et les cotés que l'on va "recoller" sont les cotés $c = \chi$ et $c' = \chi^-$. Les lettres capitales A, B, D, P et Q désignent dans ce cas les cotés suivant : $A = \alpha$, $B = \beta$, $D = \delta^-$, $P = \epsilon \gamma \epsilon^+$ et $Q = \gamma^+ \phi \delta$. Le réétiquetage de p et q fournit $P' = \epsilon^+ (\gamma^+)^- (\epsilon^+)^-$ et $Q' = \delta^+ \phi \gamma^+$. Donc le symbole surfacique $\alpha \chi \beta \epsilon \gamma \epsilon^+ \chi^- \gamma^+ \phi \delta \delta^-$ de \mathcal{F} induit un symbole surfacique $\alpha \epsilon^+ (\gamma^+)^- (\epsilon^+)^- \kappa^- \delta^+ \phi \gamma^+ \beta \kappa \delta^-$ pour \mathcal{F}' .

FIG. 2.3 – Exemple: Modification du symbole surfacique de \mathcal{F}

Selon que \mathbb{H}/Γ est orientable ou non et en renouvelant la procédure, on obtient un domaine fondamental ayant un symbole surfacique de l'une des deux formes suivantes :

$$\prod_{i=1}^r \xi_i \xi_i^+ \prod_{l=1}^k e_k \gamma_{l,1} \dots \gamma_{l,s_l} e_l^+ \prod_{j=1}^g \alpha_j \beta_j^+ \alpha_j^+ \beta_j \quad (2.1)$$

$$\prod_{i=1}^r \xi_i \xi_i^+ \prod_{l=1}^k e_l \gamma_{l,1} \dots \gamma_{l,s_l} e_l^+ \prod_{j=1}^g \delta_j \delta_j^- \quad (2.2)$$

La démarche à suivre pour parvenir à un tel résultat est similaire à celle utilisée par James [Jam55], mis à part le fait que l'on conserve le même nombre de cotés jusqu'à la dernière étape, i.e. on n'identifie pas les paires de cotés ξ , ξ^+ consécutifs (voir aussi [Wil66]).

Présentation des groupes C.N.E. par générateurs et relations

Soit \mathcal{F} un domaine fondamental régulier pour Γ , un groupe C.N.E. La proposition 2.1.8 nous donne un ensemble de générateurs pour Γ : $\{f_c \mid c \text{ est un coté de } \mathcal{F}\}$, où f_c est l'unique $f \in \Gamma$ tel que $c = f_c \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$. Si c' est le coté congruent de c , alors $f_c c' = c$ et $f_c^{-1} = f_{c'}$. On cherche maintenant des relations entre ces générateurs permettant de définir Γ .

Soit s un sommet de \mathcal{F} . On considère l'ensemble $F_s = \{f \in \Gamma \mid s \in f\mathcal{F}\}$. Comme \mathcal{F} a une intersection non vide qu'avec un nombre fini de ses images par Γ , l'ensemble F_s est fini. On obtient alors une suite de faces voisines: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 = f_1 \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}_{n-1} = f_{n-1} \mathcal{F}, \mathcal{F}_n = \mathcal{F} = id \mathcal{F}$ contenant s . Si, pour $i = 1$ à n , $f_{i-1} c_i$ est le coté de $f_{i-1} \mathcal{F}$ tel que $f_{i-1} c_i = f_{i-1} \mathcal{F} \cap f_i \mathcal{F}$, alors $c_i = f_{i-1}^{-1} f_i \mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ donc $f_{i-1}^{-1} f_i = f_{c_i}$, et $f_i = f_{i-1} f_{c_i}$. Par induction,

$$id = f_n = f_{c_1} \dots f_{c_n}. \quad (2.3)$$

Cette relation est appelée la *relation canonique du sommet s*. Chaque sommet en induit une.

Tout coté c de \mathcal{F} n'admettant pas de coté congruent, induit une relation :

$$f_c^2 = id. \quad (2.4)$$

Théorème 2.3 Soit Γ un groupe C.N.E. et \mathcal{F} un domaine fondamental régulier pour Γ .

$\mathcal{G} = \{f_c \mid c \text{ est un coté de } \mathcal{F}\} = \{f \in \Gamma \mid f\mathcal{F} \text{ est une voisine de } \mathcal{F}\}$ est un ensemble générateur pour Γ . La réunion des relations canoniques (2.3) pour les sommets s de \mathcal{F} et des relations (2.4) pour les cotés sans congruents de \mathcal{F} est un ensemble de relations définissant Γ en termes d'éléments de \mathcal{G} .

Pour plus de détails sur ce résultat, le lecteur pourra se référer à l'article de Wilkie [Wil66].

On obtient alors à partir d'un symbole surfacique (2.1) ou (2.2) la représentation de Γ suivante :

2.5 Présentation d'un groupe C.N.E. par générateurs et relations

Générateurs (Type)	Relations
x_i (elliptique)	$x_i^{m_i} = 1$ $i = 1$ à r
$\begin{cases} e_i & \text{(hyperbolique} \\ & \text{voir elliptique)} \\ c_{i,j} & \text{(réflexion)} \end{cases}$	$\begin{cases} c_{i,s_i} = e_i^{-1} c_{i,0} e_i \\ c_{i,j-1}^2 = c_{i,j}^2 = (c_{i,j-1} c_{i,j})^{n_{i,j}} = 1 \end{cases}$ $i = 1$ à k , $j = 1$ à s_i
a_i, b_i (hyperbolique)	$\prod_{j=1}^r x_j \prod_{l=1}^k e_l \prod_{m=1}^g a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} = 1$ $i = 1$ à g , cas (2.1)
d_i (glissement)	$\prod_{j=1}^r x_j \prod_{l=1}^k e_l \prod_{m=1}^g d_m^2 = 1$ $i = 1$ à g , cas (2.2)

Les générateurs énoncés ici sont dit *canoniques* et on réservera les lettres a, b, c, d, e et x pour les désigner.

avec les significations :

- Les lettres a, b, c, d, e et x correspondent aux transformations induites par les cotés $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ et ξ respectivement.
- Les m_i et $n_{i,j}$ sont des entiers positif correspondant au nombre de faces rencontrant \mathcal{F} au sommet commun entre les cotés ξ et ξ' et les cotés $\gamma_{i,j-1}$ et $\gamma_{i,j}$ respectivement.

Signature

Wilkie [Wil66] introduit la notion de *signature d'un groupe C.N.E.* afin de synthétiser sa présentation par générateurs et relations.

Une *signature* est une suite d'entiers non négatifs et de symboles de la forme :

$$\sigma = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\})$$

Si le signe “+” apparaît, on notera $\text{sign}(\sigma) = +$, sinon $\text{sign}(\sigma) = -$. Les entiers m_1, \dots, m_r sont appelés *périodes propres de σ* et les entiers $n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i}$ sont les *périodes du cycle-période* $(n_{i,1}, \dots, n_{i,s_i})$. On écrira $g(\sigma) = g$ et $k(\sigma) = k$. Si $r = 0$, on peut avoir un ensemble vide de périodes propres que l'on notera $[-]$. De même pour $s_i = 0$, le cycle-période correspondant sera noté $(-)$ et dans le cas où $k = 0$, i.e. σ n'a pas de cycle-période, on notera $\{-\}$.

Étant donné un groupe C.N.E. Γ , présenté par générateurs et relations (présentation 2.5), on définit ainsi la *signature $\sigma(\Gamma)$ de Γ* :

$$\sigma(\Gamma) = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\})$$

avec $\text{sign}(\sigma(\Gamma)) = +$ dans le cas (2.1) et on dit que Γ est *orientable*; $\text{sign}(\sigma(\Gamma)) = -$ dans le cas (2.2) et Γ est *non orientable*. L'entier g est appelé *genre orbital de Γ* .

Un groupe C.N.E. Γ ayant une signature de la forme : $\sigma(\Gamma) = (g; \pm; [-]; \{(-), k, (-)\})$, $k \geq 0$, est appelé un *groupe surfacique*. Si $k \geq 1$, alors Γ est dit *groupe surfacique bordé*.

Remarque: Les seuls éléments d'ordre fini de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ sont les elliptiques ou des réflexions (voir par exemple [Leh66]). De plus, en utilisant les notations précédentes, un élément g d'un groupe C.N.E. est d'ordre fini si et seulement si il est conjugué soit à une puissance d'un x_i , soit à une puissance d'un $c_{i,j-1} c_{i,j}$ ou à un $c_{i,j}$ (voir [BEGG90]). Par conséquent, on a la

Proposition 2.1.9 *Un groupe C.N.E. est un groupe surfacique si et seulement si il n'a pas d'éléments préservant l'orientation d'ordre fini, i.e. s'il ne contient pas d'elliptiques.*

2.2 Quotient de \mathbb{H} par un groupe C.N.E.

2.2.1 Un peu de topologie

Les propriétés

Soit Γ un groupe C.N.E. de signature σ , où σ est donnée par

$$\sigma = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}). \quad (2.6)$$

Martínez [Mar86] montre qu'il existe un domaine fondamental régulier convexe \mathcal{F} pour Γ ayant un symbole surfacique de la forme (2.1) ou (2.2) selon $\text{sign}(\sigma)$.

En identifiant les points des cotés congruents de \mathcal{F} , on obtient une surface représentant l'espace des orbites $\mathcal{S} = \mathbb{H}/\Gamma$. Celle-ci a les propriétés suivantes :

Proposition 2.2.1 : Propriétés topologiques de $\mathcal{S} = \mathbb{H}/\Gamma$

(i) \mathcal{S} est une surface compacte

- orientable si $\text{sign}(\sigma) = +$, i.e. le symbole surfacique de Γ est de la forme (2.1);
- non-orientable si $\text{sign}(\sigma) = -$, i.e. si le symbole surfacique de Γ est de la forme (2.2).

Ceci justifie le terme de groupe C.N.E. orientable ou non (voir section 2.1.3).

(ii) Si $k \neq 0$, \mathcal{S} est une surface à bord et le nombre de composantes connexes de $\partial\mathcal{S}$ est $k = k(\sigma)$.

(iii) Le genre orbital $g = g(\sigma)$ de Γ correspond au genre topologique de \mathcal{S} et \mathcal{S} possède

- g anses si $\text{sign}(\sigma) = +$, i.e. si le symbole surfacique de Γ est de la forme (2.1);
- g entrecroisements (ou "cross-caps ") si $\text{sign}(\sigma) = -$, i.e. si le symbole surfacique de Γ est de la forme (2.2).

Du point de vue des isomorphismes

Cette section s'inspire des articles de Macbeath [Mac67] et de son élève Singerman [Sin74] qui redémontre les résultats de Macbeath de façon plus non géométriquement irréductible à partir des propriétés algébriques des groupes C.N.E.

Deux groupes C.N.E. Γ et Γ' sont dit *géométriquement isomorphes* si il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ et un isomorphisme $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ tels que pour tous $w, z \in \mathbb{H}$ et $g \in \Gamma$,

$$w = g \cdot z \Leftrightarrow f(w) = \phi(g) \cdot f(z).$$

En d'autres termes $f \circ g = \phi(g) \circ f$, donc $\phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$. Donc deux groupes C.N.E. sont géométriquement isomorphes s'il sont conjugués dans le groupe des homéomorphismes de \mathbb{H} .

Si un isomorphisme (algébrique) $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ provient d'un isomorphisme géométrique, on dira que ϕ peut être réalisé géométriquement et l'homéomorphisme f associé sera appelé *réalisation géométrique* de ϕ . Notons que f n'a pas nécessairement de lien avec la géométrie non-euclidienne de \mathbb{H} .

Macbeath prouve de plus le résultat suivant :

Théorème 2.4 [Mac67, Théorème 3, page 1201]

Tout isomorphisme de groupe C.N.E. peut être réalisé géométriquement.

Proposition 2.2.2 Les isomorphismes géométriques, donc les isomorphismes d'après le théorème 2.4, entre groupes C.N.E. préservent le "type" d'un élément.

Ainsi étant donné un isomorphisme géométrique $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$, pour tout élément $g \in \Gamma$, on a : $\phi(g)$ est elliptique (resp. hyperbolique, parabolique, un glissement ou une réflexion) si et seulement si g est elliptique (resp. hyperbolique, parabolique, un glissement ou une réflexion)

Preuve: Cette démonstration utilise principalement les résultats de la proposition 2.1.5 sur les points fixes. Soit $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un isomorphisme géométrique et $g \in \Gamma$.

Cas 1 : g est parabolique : $\text{Fixe}(g)$, donc $\text{Fixe}(\phi(g))$, contient un unique point, d'où $\phi(g)$ est parabolique.

Cas 2: g est une réflexion : $\text{Fixe}(g)$, donc $\text{Fixe}(\phi(g))$, est un ensemble infini, d'où $\phi(g)$ est une réflexion.

Cas 3: g est elliptique : $\text{Fixe}(g)$, donc $\text{Fixe}(\phi(g))$, contient deux éléments et g , donc $\phi(g)$, admet un unique point fixe comme automorphisme de \mathbb{H} , donc $\phi(g)$ est elliptique.

Cas 4: g est hyperbolique ou un glissement : D'après les cas précédents, $\phi(g)$ ne peut être que hyperbolique ou un glissement. Si g est hyperbolique g , donc $\phi(g)$ préserve l'orientation et si g est un glissement, g donc $\phi(g)$ l'inverse.

D'où le résultat. \square

Soit $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un isomorphisme entre deux groupes C.N.E. et $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la réalisation géométrique de ϕ . Alors pour $z \in \mathbb{H}$, f envoie l'orbite de z par Γ dans l'orbite de $f(z)$ par Γ' . En effet $f(\Gamma z) = \phi(\Gamma) f(z) = \Gamma' f(z)$. On obtient alors la propriété suivante :

Théorème 2.5 *Un isomorphisme $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ entre groupes C.N.E. induit un homéomorphisme $f^* : \mathbb{H}/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma'$.*

Corollaire 2.2.1 *Soit Γ un groupe C.N.E. de signature σ donnée par (2.6). Alors l'orientabilité de Γ , son genre orbital g ainsi que le nombre k sont invariants par isomorphisme.*

2.2.2 Réalisation de surfaces conformes comme quotient

Le but de cette partie est de réaliser un revêtement universel de surfaces conformes par le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} .

Dans un premier temps, le théorème suivant va permettre de munir le quotient de \mathbb{H} par un groupe surfacique d'une structure de surface conforme.

Théorème 2.6 *Soit Γ un groupe C.N.E. surfacique. Il existe une unique structure de surface conforme sur le quotient \mathbb{H}/Γ faisant de l'application quotient $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ un morphisme conforme.*

Preuve: Nous allons étudier deux cas.

(1) Γ ne contient pas de réflexions : Alors Γ ne contient que des éléments hyperboliques ou des glissements, donc d'après la proposition 2.1.5, Γ agit librement sur \mathbb{H} . De plus Γ étant un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\mathbb{H})$, il agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} par la proposition 2.1.4. On peut alors appliquer le théorème 1.10 qui nous donne une unique structure de surface conforme sur \mathbb{H}/Γ faisant de π un morphisme conforme.

(2) Γ contient au moins une réflexion σ : Soit Γ^+ l'ensemble des éléments de Γ qui préservent l'orientation, donc les éléments de Γ qui agissent analytiquement sur \mathbb{H} . On a $[\Gamma, \Gamma^+] = 2$ et $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma^+$, d'où $\langle \sigma \rangle \simeq \Gamma/\Gamma^+$ et $\mathbb{H}/\Gamma \simeq (\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{(\Gamma/\Gamma^+)} \simeq (\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{\langle \sigma \rangle}$. De plus les éléments de Γ^+ sont forcément des éléments hyperboliques ce qui fait que Γ^+ agit librement sur \mathbb{H} (proposition 2.1.5) et proprement discontinûment (proposition 2.1.4). Le théorème 1.10 nous donne alors une unique structure de surface conforme sur \mathbb{H}/Γ^+ faisant de l'application quotient $\pi^+ : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma^+$ un morphisme conforme. De plus, les éléments de Γ^+ préservant l'orientation, \mathbb{H}/Γ^+ est orientable et admet ainsi une unique structure presque complexe faisant de π^+ un morphisme presque complexe.

Maintenant, σ inversant l'orientation de \mathbb{H} , donc de \mathbb{H}/Γ^+ , agit de façon anti-presque complexe. Comme de plus $\sigma^2 = id$, elle induit une action du groupe de Galois $\Sigma \simeq \langle \sigma \rangle = \{\sigma, id\}$ de \mathbb{C} sur \mathbb{R} sur \mathbb{H}/Γ^+ . D'après le corollaire 1.3.2, il existe une unique structure conforme sur $(\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{\langle \sigma \rangle}$ faisant de $p : \mathbb{H}/\Gamma^+ \rightarrow (\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{\langle \sigma \rangle}$ un morphisme conforme. On a ainsi obtenu une structure conforme sur \mathbb{H}/Γ faisant de $\pi : \mathbb{H} \xrightarrow{\pi^+} \mathbb{H}/\Gamma^+ \xrightarrow{p} (\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{\langle \sigma \rangle} \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ un morphisme conforme.

Reste à montrer l'unicité de la structure. Pour cela, il suffit de voir que cela ne dépend pas du choix de la réflexion σ choisie. Si $\sigma' \in \Gamma$ est une autre réflexion, Alors, le corollaire 1.3.3 nous donne un isomorphisme conforme entre $(\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{\langle \sigma \rangle}$ et $(\mathbb{H}/\Gamma^+)/_{\langle \sigma' \rangle}$, d'où l'unicité. \square

Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme non géométriquement irréductible de genre $g \geq 2$. On peut munir \mathcal{S} d'une structure de surface de Riemann, \mathfrak{S} (cf. théorème 1.5) et d'après le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann (voir par exemple [FK91]), \mathfrak{S} admet un revêtement universel

holomorphe par \mathbb{H} , $p : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{S}$. Donc (\mathfrak{S}, φ) admet un revêtement universel $p : \mathbb{H} \rightarrow (\mathfrak{S}, \varphi)$ tel que p soit un morphisme conforme. On a alors la

Proposition 2.2.3 *Soit (\mathfrak{S}, φ) une surface conforme non géométriquement irréductible de genre $g \geq 2$ et $p : \mathbb{H} \rightarrow (\mathfrak{S}, \varphi)$ son revêtement universel. On pose $\Gamma = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid p \circ f = p\}$.*

- (1) *L'application $h : \Gamma z \in \mathbb{H}/\Gamma \mapsto p(z) \in \mathfrak{S}$ est un homéomorphisme;*
- (2) *Le stabilisateur Γ_z de tout point $z \in \mathbb{H}$ est trivial;*
- (3) *Γ est un groupe C.N.E. surfacique.*

Preuve: (1) h est bien définie: Soit $z, z' \in \mathbb{H}$ tels que $\Gamma z = \Gamma z'$. Cela signifie qu'il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(z) = z'$, d'où $p(z') = p \circ g(z) = p(z)$.

On montre maintenant que h est bijective. La surjectivité provient de celle de p . Soit $z, z' \in \mathbb{H}$ tels que $p(z) = p(z') = s$. Comme $p : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{S}$ est un revêtement universel holomorphe, on sait (voir par exemple [FK91]) qu'il existe un automorphisme holomorphe g de \mathbb{H} vérifiant $p \circ g = p$ et tel que $g(z) = z'$. Donc $g \in \Gamma$ et $\Gamma z = \Gamma z'$.

Reste à voir la continuité de h et de h^{-1} . Par définition, $h \circ \pi = p$, où $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ est la projection canonique. Donc h est continue. Si $U \subseteq \mathbb{H}/\Gamma$ est un ouvert, alors $h(U) = p \circ \pi^{-1}(U)$ est ouvert puisque p est une application ouverte et π est continue.

(2) Soit $g \in \Gamma_z$. Si on montre que $\text{Fixe}(g) = \mathbb{H}$, alors $g = id_{\mathbb{H}}$. \mathbb{H} étant connexe, il suffit de montrer que l'ensemble fermé non-vide $\text{Fixe}(g)$ est ouvert dans \mathbb{H} . Soit $z' \in \text{Fixe}(g)$, U un voisinage ouvert de z' dans \mathbb{H} et V un voisinage ouvert de $p(z')$ dans \mathfrak{S} tels que $p|_U : U \rightarrow V$ soit un homéomorphisme. Par continuité de g et sachant que $g(z') = z'$, il existe un voisinage ouvert U' de z' tel que $g(U') \subseteq U$. De plus $p \circ g(U') = p(U')$. Alors $U' \subseteq \text{Fixe}(g)$. En effet, si $u \in U'$, on sait que $p \circ g(u) = p(u)$ et que $u, g(u) \in U$. Comme $p|_U$ est injective, $g(u) = u$ i.e. $u \in \text{Fixe}(g)$.

(3) Si on montre que Γ est discret, alors $\mathbb{H}/\Gamma \simeq \mathfrak{S}$ est compact. Donc Γ est un groupe C.N.E. De plus, par (2), Γ n'a pas d'éléments elliptique donc est un groupe surfacique d'après la dernière remarque de la section 2.1.3.

Si Γ n'est pas discret, il existe une suite d'éléments distincts $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Γ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = id_{\mathbb{H}}$. Soit $z \in \mathbb{H}$ et U, V des voisinages de z et $p(z)$ respectivement tels que $p|_U : U \rightarrow V$ soit bijective. Comme $g_n \in \Gamma$, on a $p \circ g_n(z) = p(z)$ et $g_n(z)$, d'où $g_n(z) \notin U \setminus \{z\}$. De plus, d'après le lemme 2.1.2, $z = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z)$. Donc, pour n assez grand, on doit avoir $g_n(z) = z$. En utilisant (2), on obtient $g_n = id_{\mathbb{H}}$ pour n assez grand ce qui est exclu. \square

Corollaire 2.2.2 *Soit (\mathfrak{S}, φ) une surface conforme non géométriquement irréductible de genre $g \geq 2$. Alors $(\mathfrak{S}, \varphi) \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ comme surface conforme pour un certain groupe surfacique Γ . De plus, Γ est un groupe fuchsien.*

Preuve: D'après les résultats sur les sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ de la section 2.1.1, tout sous groupe discret de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} . La première partie du corollaire découle alors directement de la proposition 2.2.3 précédente et du théorème 1.10.

Si $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ renverse l'orientation de \mathbb{H} , l'égalité $p \circ f = p$ ne peut avoir lieu puisque par construction, p est compatible avec l'orientation de \mathbb{H} et \mathfrak{S} . Donc $f \notin \Gamma$. \square

Remarque: En utilisant les résultats sur l'uniformisation des surfaces de Riemann (voir par exemple [FK91]), on voit que $\Gamma \simeq \Pi_1(\mathfrak{S})$.

Le but de cette section est d'étendre ce résultat à une grande partie des surfaces conformes.

Théorème 2.7 *Soit (\mathfrak{S}, φ) une surface conforme de genre g et de type τ telle que $\tilde{g}(g, \tau) \geq 2$ (voir section 3.3.3). Il existe un groupe surfacique Γ tel que (\mathfrak{S}, φ) et \mathbb{H}/Γ soient isomorphes en temps que surfaces conformes. De plus, si $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ est la projection canonique, alors $\Gamma = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi \circ f = \pi\}$.*

Preuve: Le cas des surfaces conformes non géométriquement irréductibles a été vu dans le corollaire 2.2.2. On suppose donc que (\mathfrak{S}, φ) est une surface conforme géométriquement irréductible et soit $p : \tilde{\mathfrak{S}} \rightarrow (\mathfrak{S}, \varphi)$ son double complexe (voir section 1.3.1). La proposition 1.3.3 implique que $g(\tilde{\mathfrak{S}}) = \tilde{g}(g, \tau) \geq 2$. D'après le corollaire 2.2.2, il existe un groupe surfacique Γ^+ tel que $\tilde{\mathfrak{S}} =$

\mathbb{H}/Γ^+ . De plus, si on note $\pi^+ : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{S}}$ la projection canonique, le corollaire 2.2.2 implique que $\Gamma^+ = \{g \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi^+ \circ g = \pi^+\}$. On rappelle que $\tilde{\mathfrak{S}}$ est munie d'une action de $\Sigma = \{\sigma, id\}$ et $\tilde{\mathfrak{S}}/\Sigma = (\mathfrak{S}, \varphi)$. Ainsi, $(\mathfrak{S}, \varphi) \simeq (\mathbb{H}/\Gamma^+)/\Sigma$ et on cherche un groupe surfacique Γ tel que $\Sigma \simeq \Gamma/\Gamma^+$. Dans ce cas, $(\mathfrak{S}, \varphi) = \mathbb{H}/\Gamma$, par le théorème 2.6.

Tout d'abord, notons que $\pi^+ : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{S}}$ et $\sigma \circ \pi^+ : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{S}}$ sont deux revêtements universels. Il existe donc $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} \\ \pi^+ \downarrow & & \downarrow \pi^+ \\ \tilde{\mathfrak{S}} & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{\mathfrak{S}} \end{array}$$

- $\Gamma = \langle \Gamma^+, g \rangle$ est un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\mathbb{H})$ et $[\Gamma : \Gamma^+] = 2$: Si on montre la dernière affirmation, la discrétion de Γ proviendra trivialement de celle de Γ^+ . Tout d'abord, $g \notin \Gamma^+$ car $\Gamma^+ \subseteq \text{Aut}^+(\mathbb{H})$ et $\pi^+ \circ g = \sigma \circ \pi^+$ implique que g inverse l'orientation de \mathbb{H} puisque σ inverse celle de $\tilde{\mathfrak{S}}$. De plus $\pi^+ \circ g^2 = \sigma \circ \pi^+ \circ g = \sigma^2 \circ \pi^+ = \pi^+$, i.e. $g^2 \in \Gamma^+$. Maintenant, si $h \in \Gamma^+$, $\pi^+ \circ g \circ h \circ g^{-1} = \sigma \circ \pi^+ \circ h \circ g^{-1} = \sigma \circ \pi^+ \circ g^{-1} = \pi^+ \circ g \circ g^{-1} = \pi^+$, donc $g\Gamma^+g^{-1} \subseteq \Gamma^+$. D'où le résultat.

- On construit un isomorphisme $f : \tilde{\mathfrak{S}}/\Sigma \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{H}/\Gamma \\ \pi^+ \downarrow & & \uparrow f \\ \tilde{\mathfrak{S}} & \xrightarrow{p} & \mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}/\Sigma \end{array} \quad (2.7)$$

où $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ est l'application quotient et f est donnée par $f : s = p \circ \pi^+(z) \mapsto \pi(z)$. Cette application est bien définie. En effet, si $s = p \circ \pi^+(z) = p \circ \pi^+(z')$ pour $z \neq z' \in \mathbb{H}$, alors soit $\pi^+(z) = \pi^+(z')$ ou bien $\pi^+(z) = \sigma \circ \pi^+(z')$. Dans le premier cas, $\pi(z) = \pi(z')$ puisque $\Gamma^+ \subseteq \Gamma$. Dans le second cas, $\pi^+(z) = \sigma \circ \pi^+(z') = \pi^+ \circ g(z')$, donc $z = h \circ g(z')$ pour un certain $h \in \Gamma^+ \subseteq \Gamma$. Comme $g \in \Gamma$, on obtient $\pi(z) = \pi(z')$.

On vérifie aussi que f est injective: soit $s = p \circ \pi^+(z)$ et $s' = p \circ \pi^+(z')$ tels que $f(s) = s'$. Cela signifie qu'il existe $h \in \Gamma$ tel que $z' = h(z)$. Si $h \in \Gamma^+$, alors $\pi^+(z) = \pi^+(z')$ donc $s = s'$. Si $h \notin \Gamma^+$, il existe $h' \in \Gamma^+$ tel que $h = g \circ h'$. Donc $\sigma \circ \pi^+(h'(z)) = \pi^+ \circ g(h'(z)) = \pi^+(z')$ et $s' = p \circ \pi^+(z') = p \circ \pi^+(h'(z)) = p \circ \pi^+(z) = s$. D'où l'injectivité.

La commutativité du diagramme montre alors que f est un isomorphisme conforme.

- Γ est un groupe surfacique : On a vu que Γ était un groupe discret. De plus $\mathbb{H}/\Gamma \simeq \mathfrak{S}$, donc Γ est un groupe C.N.E. Si Γ n'est pas surfacique, alors il existe un élément elliptique $e \in \Gamma$ (proposition 2.1.9). Comme Γ^+ est un groupe surfacique et que $[\Gamma : \Gamma^+] = 2$, on obtient que $g \in \Gamma = \Gamma^+ \cup e\Gamma^+ \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H})$, ce qui est impossible.

- $\Gamma = \{h \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi \circ h = \pi\} = \text{Aut}(\pi)$: Par construction, $\Gamma \subseteq \text{Aut}(\pi)$. Réciproquement, soit $h \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ tel que $\pi \circ h = \pi$. Par commutativité du diagramme (2.7), on a $f \circ p \circ \pi^+ \circ h = f \circ p \circ \pi^+$, d'où $p \circ \pi^+ \circ h = p \circ \pi^+$. De plus, $\mathcal{E}_h = \{z \in \mathbb{H} \mid \pi^+(z) \neq \pi^+ \circ h(z)\} \subseteq \{z \in \mathbb{H} \mid \sigma \circ \pi^+(z) = \pi^+ \circ h(z)\}$. Comme σ inverse l'orientation, \mathcal{E}_h est vide si h est analytique. Dans ce cas, $\pi^+ \circ h = \pi^+$ et $h \in \Gamma^+ \subseteq \Gamma$. Si h n'est pas analytique, $g \circ h$ l'est. De plus $p \circ \pi^+ \circ (g \circ h) = p \circ \sigma \circ \pi^+ \circ h = p \circ \pi^+ \circ h = p \circ \pi^+$, donc comme précédemment, $g \circ h \in \Gamma^+ \subseteq \Gamma$. Donc $h \in \Gamma$. \square

Remarque: Les seules surfaces topologiques ne satisfaisant pas les conditions du théorème 2.7 sont :

Surfaces conformes	$\begin{cases} g = 0 \\ g = 1 \end{cases}$	sphère
non géométriquement irréductibles:		tore
Surfaces conformes géométriquement irréductibles:	$\begin{cases} g = 0, & \tau = +1 \\ g = 0, & \tau = +2 \\ g = 1, & \tau = -0 \\ g = 2, & \tau = -0 \\ g = 1, & \tau = -1 \end{cases}$	disque fermé
		anneau fermé
		plan projectif
		bouteille de Klein
		ruban de Möbius

Proposition 2.2.4 *Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme. Elle admet un revêtement universel $p : \mathcal{U} \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ avec $\mathcal{U} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathcal{U} = \mathbb{C}$ ou $\mathcal{U} = \mathbb{H}$ et p est un morphisme conforme.*

Preuve: Soit (\mathcal{S}, φ) , une surface conforme de genre g et de type τ .

- $\tilde{g}(g, \tau) \geq 2$: On est dans les hypothèses du théorème 2.7. (\mathcal{S}, φ) admet donc un revêtement universel $p : \mathbb{H} \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ avec p conforme.

- $\tilde{g}(g, \tau) < 2$ et (\mathcal{S}, φ) est une surface conforme non géométriquement irréductible : Si $g = 0$, $\mathcal{S} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est simplement connexe. Si $g = 1$, \mathcal{S} est un tore et il existe un revêtement universel holomorphe, donc conforme, de \mathcal{S}_φ par \mathbb{C} .

- $\tilde{g}(g, \tau) = 1$ et (\mathcal{S}, φ) est une surface conforme géométriquement irréductible : On a $g(\tilde{\mathcal{S}}) = \tilde{g}(g, \tau) = 1$, où $\pi : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ est le double complexe de (\mathcal{S}, φ) . Donc $\tilde{\mathcal{S}}$ est un tore et admet un revêtement universel holomorphe $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$. On obtient alors un revêtement universel conforme $p : \mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{\mathcal{S}} \xrightarrow{\pi} (\mathcal{S}, \varphi)$.

- $\tilde{g}(g, \tau) = 0$ et (\mathcal{S}, φ) est une surface conforme géométriquement irréductible : On a $g(\tilde{\mathcal{S}}) = \tilde{g}(g, \tau) = 0$, où $\pi : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ est le double complexe de (\mathcal{S}, φ) . Donc $\tilde{\mathcal{S}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et on obtient le revêtement universel conforme $p = \pi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$. \square

2.2.3 Voyons un peu plus loin

Concernant les isomorphismes

Soit (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') deux surfaces conformes. D'après le théorème 2.7, il existe des groupes surfaciques Γ et Γ' tels que $(\mathcal{S}, \varphi) = \mathbb{H}/\Gamma$ et $(\mathcal{S}', \varphi') = \mathbb{H}/\Gamma'$. De plus, si on note $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}$ et $\pi' : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}'$ les applications quotient, on peut choisir Γ et Γ' tels que $\Gamma = \text{Aut}(\pi)$ et $\Gamma' = \text{Aut}(\pi')$. On notera $A(\Gamma, \Gamma') = \{g \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi'(z) = \pi'(w) \iff \pi \circ g(z) = \pi \circ g(w)\}$

Lemme 2.2.1 *Soit $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $g \in A(\Gamma, \Gamma')$.

(ii) Il existe un unique isomorphisme $\hat{g} : (\mathcal{S}', \varphi') \rightarrow (\mathcal{S}, \varphi)$ faisant commuter le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ (\mathcal{S}', \varphi') & \xrightarrow{\hat{g}} & (\mathcal{S}, \varphi) \end{array}$$

(iii) $\Gamma' = g^{-1}\Gamma g$.

Preuve: (i) \Rightarrow (ii) : Comme $g \in A(\Gamma, \Gamma')$, on peut définir un homéomorphisme $\hat{g} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ en posant pour $s = \pi'(z) \in \mathcal{S}'$, $\hat{g}(s) = \pi \circ g(z)$. Pour voir qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme conforme, il suffit d'appliquer successivement la proposition 1.3.5 et son corollaire 1.3.3 en se rappelant de la construction de la structure conforme sur \mathbb{H}/Γ et \mathbb{H}/Γ' .

(ii) \Rightarrow (iii) : Soit $h' \in \Gamma'$ et $h = g \circ h' \circ g^{-1}$. On obtient $\pi \circ h = \pi \circ g \circ h' \circ g^{-1} = \hat{g} \circ \pi' \circ h' \circ g^{-1} = \hat{g} \circ \pi' \circ g^{-1} = \pi \circ g \circ g^{-1} = \pi$. Donc $h \in \Gamma$ et $\Gamma' \subseteq g^{-1}\Gamma g$.

Réciproquement, si $h' \in g^{-1}\Gamma g$, alors $g \circ h' \circ g^{-1} \in \Gamma$. Cela signifie $\pi \circ g \circ h' \circ g^{-1} = \pi$, donc que $\hat{g} \circ \pi' \circ h' = \hat{g} \circ \pi'$. Comme \hat{g} est bijective, on obtient $\pi' \circ h' = \pi'$ et $h' \in \Gamma'$.

(iii) \Rightarrow (i) : Soit $z, w \in \mathbb{H}$ tels que $\pi'(z) = \pi'(w)$. Il existe $h' \in \Gamma' = g^{-1}\Gamma g$ tel que $w = h'(z)$. On a $h = g \circ h' \circ g^{-1} \in \Gamma$ et comme $\pi \circ h = \pi$, on a $\pi \circ g(w) = \pi \circ g \circ h'(z) = \pi \circ h \circ g(z) = \pi \circ g(z)$. La réciproque se montre de la même façon. \square

On peut maintenant montrer le théorème suivant:

Théorème 2.8 On note $\text{Isom}((\mathcal{S}', \varphi'), (\mathcal{S}, \varphi))$ l'ensemble des isomorphismes conformes de (\mathcal{S}', φ') dans (\mathcal{S}, φ) .

- (1) L'application $g \in A(\Gamma, \Gamma') \mapsto \hat{g} \in \text{Isom}((\mathcal{S}', \varphi'), (\mathcal{S}, \varphi))$ est surjective.
(2) (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') sont isomorphes si et seulement si Γ et Γ' sont des sous-groupes conjugués de $\text{Aut}(\mathbb{H})$.
(3) $\text{Aut}(\mathcal{S}, \varphi) \simeq N(\Gamma)/\Gamma$, où $N(\Gamma)$ est le normalisateur de Γ dans $\text{Aut}(\mathbb{H})$.

Preuve: (1) : - Si (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') sont des surfaces non géométriquement irréductibles. Soit $\phi \in \text{Isom}((\mathcal{S}', \varphi'), (\mathcal{S}, \varphi))$. Comme $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}$ et $\pi' : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}'$ sont des revêtements universels holomorphes, il existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{S} \end{array} \quad (2.8)$$

Clairement $g \in A(\Gamma, \Gamma')$, donc $\phi = \hat{g}$ d'après le (2) du lemme 2.2.1,

- Dans le cas général, on considère les doubles complexes $(\tilde{\mathcal{S}}, f, \sigma)$ et $(\tilde{\mathcal{S}}', f', \sigma')$ de (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') respectivement. Si $\phi \in \text{Isom}((\mathcal{S}', \varphi'), (\mathcal{S}, \varphi))$, d'après le corollaire 1.3.1, il existe une application $\psi \in \text{Isom}(\tilde{\mathcal{S}}', \tilde{\mathcal{S}})$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}}' & \xrightarrow{\psi} & \tilde{\mathcal{S}} \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{S} \end{array} \quad (2.9)$$

Soient $p : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ et $p' : \mathbb{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}'$ les projections canoniques. D'après (2.8) appliqué aux surfaces conformes géométriquement irréductibles $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{S}}'$, il existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{\mathcal{S}}' & \xrightarrow{\psi} & \tilde{\mathcal{S}} \end{array} \quad (2.10)$$

Sachant que $\mathcal{S} = \mathbb{H}/\Gamma$ et $\mathcal{S}' = \mathbb{H}/\Gamma'$, les projections $\pi = f \circ p : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}$ et $\pi' = f' \circ p' : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}'$ sont les applications quotients. En recollant les diagrammes (2.9) et (2.10), on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{g} & \mathbb{H} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{S} \end{array}$$

Et par construction, $g \in A(\Gamma, \Gamma')$ et $\phi = \hat{g}$.

(2) : On voit que (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') sont isomorphes si et seulement si $A(\Gamma, \Gamma') \neq \emptyset$. Le lemme 2.2.1 nous donne alors le résultat.

(3) : En utilisant le lemme 2.2.1 avec $\Gamma = \Gamma'$, on obtient $A(\Gamma, \Gamma) = N(\Gamma)$. La partie (1) nous indique que l'application $\mu : g \in N(\Gamma) \mapsto \hat{g} \in \text{Aut}(\mathcal{S})$ est surjective. Si $g, g' \in A(\Gamma, \Gamma)$, alors $\pi \circ (g \circ g') = (\hat{g} \circ \hat{g}') \circ \pi$. D'autre part, $\pi \circ (g \circ g') = \widehat{(g \circ g')} \circ \pi$. D'après le lemme 2.2.1, on a $\hat{g} \circ \hat{g}' = \widehat{g \circ g'}$, d'où μ est un morphisme de groupe surjectif.

Il reste alors à vérifier que $\ker \mu = \Gamma$. Si $g \in \Gamma$, on a $\pi \circ g = \pi$, i.e. $\pi \circ g = id \circ \pi$ et par le lemme 2.2.1, $\hat{g} = id$, donc $g \in \ker \mu$. Réciproquement, si $g \in \ker \mu$, alors $\hat{g} = id$, i.e. $\pi \circ g = \pi$. Donc $g \in \Gamma$. \square

Liens avec le groupe fondamental

Soit \mathcal{S} une surface compacte de genre g et de type τ telle que $\tilde{g}(g, \tau) \geq 2$ et $\Pi_1(\mathcal{S})$ son groupe fondamental. Si $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{S}$ est un revêtement universel et $\Gamma(\mathcal{S}) = \{g \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \mid \pi \circ g = \pi\}$, groupe surfacique tel que $\mathcal{S} \simeq \mathbb{H}/\Gamma$, on a :

$$\Pi_1(\mathcal{S}) = \begin{cases} \left\{ A_1, B_1, \dots, A_g, B_g \left| \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = +0 & (2.11a) \\ \left\{ A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, E_1, \dots, E_k \left| \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] \prod_{j=1}^k E_j = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = +k & (2.11b) \\ \left\{ D_1, \dots, D_g \left| \prod_{i=1}^g D_i^2 = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = -0 & (2.11c) \\ \left\{ D_1, \dots, D_g, E_1, \dots, E_k \left| \prod_{i=1}^g D_i^2 \prod_{j=1}^k E_j = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = -k & (2.11d) \end{cases}$$

$$\Gamma(\mathcal{S}) = \begin{cases} \left\{ a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = +0 & (2.12a) \\ \left\{ a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, e_1, c_1, \dots, e_k, c_k \left| \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^k e_j = 1, \right. \right. \\ \left. \left. [c_l, e_l] = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = +k & (2.12b) \\ \left\{ d_1, \dots, d_g \left| \prod_{i=1}^g d_i^2 = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = -0 & (2.12c) \\ \left\{ d_1, \dots, d_g, e_1, c_1, \dots, e_k, c_k \left| \prod_{i=1}^g d_i^2 \prod_{j=1}^k e_j = 1, \right. \right. \\ \left. \left. [c_l, e_l] = 1 \right. \right\}, & \text{si } \tau = -k & (2.12d) \end{cases}$$

Avec $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ est le commutateur de x et y et k est un entier strictement positif.

On a alors la

Proposition 2.2.5 *Soit \mathcal{S} une surface de genre g et de type τ , telle que $\tilde{g}(g, \tau) \geq 2$. On a une injection canonique $\gamma : \Pi_1(\mathcal{S}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{S})$.*

Si $\tau = \pm 0$, i.e. $\partial\mathcal{S} = \emptyset$, γ est un isomorphisme canonique entre le groupe fondamental $\Pi_1(\mathcal{S})$ et le groupe surfacique $\Gamma(\mathcal{S})$.

Si \mathcal{S} est une surface à bord, et $\Gamma(\mathcal{S})$ est entièrement déterminé par l'image de $\Pi_1(\mathcal{S})$ dans $\Gamma(\mathcal{S})$ par γ .

Preuve: Les deux premières assertions sont évidentes. Pour montrer le dernier résultat, il suffit de voir que la réflexion c_l est entièrement donnée par e_l pour $l = 1$ à k .

Soit $e \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ un élément hyperbolique fixé et $c \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ une réflexion telle que $[c, e] = 1$. Si p_1 et p_2 sont les points fixes attractif et répulsif de e dans $\overline{\mathbb{C}}$, alors $c(p_i) = e(c(p_i))$, $i = 1, 2$, ce qui signifie que soit $c(p_1) = p_1$ et alors forcément $c(p_2) = p_2$ ou bien $c(p_1) = p_2$ et alors forcément $c(p_2) = p_1$. Pour $s \in \mathbb{H}$ assez proche de p_1 , la suite $s_0 = s, s_1 = e(s), \dots, s_n = e(s_{n-1}) = e^n s, \dots$ converge vers p_1 . Or $c(s_n) = c(e^n(s)) = e^n(c(s)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c(p_1)$. Donc $c(p_1)$ est le point attractif de e et $c(p_i) = p_i$ pour $i = 1, 2$. Or la réflexion c est entièrement déterminé par l'ensemble de ses points fixes dans $\overline{\mathbb{C}}$, qui forment un cercle orthogonal à $\overline{\mathbb{R}}$ et celui-ci ne dépend que de son intersection avec $\overline{\mathbb{R}}$, qui ici est donnée par les points p_1 et p_2 . D'où le résultat. \square

Soit $C \in \Pi_1(\mathcal{S})$. On appellera *déterminant de C* et on notera $\det(C)$ le déterminant de $\gamma(C) \in \Gamma$: $\det(C) = \det(\gamma(C))$, où $\gamma : \Pi_1(\mathcal{S}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{S})$ est l'injection canonique. Par définition $|\det(C)| = 1$ et on dira que C *préserve l'orientation* (resp. C *renverse l'orientation*) si $\det(C) = 1$ (resp. $\det(C) = -1$).

Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux surfaces de genre g et de type $\tau = \pm k \neq \pm 0$ et $F : \Pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{S}')$ un isomorphisme. On dira que F *préserve le bord* si F vérifie, pour $l = 1$ à k :

$$F(E_l) = C_l E'_{\sigma(l)} C_l^{-1}$$

où σ est une permutation des entiers $1, \dots, k$ et $\det(C_l) \varepsilon_l = \varepsilon = \pm 1$ avec $C_l \in \Pi_1(\mathcal{S}')$.

Si $\tau = \pm 0$, on pourra dire de tout isomorphisme $F : \Pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{S}')$ qu'il préserve le bord.

Chapitre 3

Sur les espaces de Teichmüller

3.1 Rappels pour les surfaces de Riemann

3.1.1 Définitions et notations

Soit \mathcal{S} une surface compacte différentiable orientée de genre g . L'espace $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ des modules de \mathcal{S} est l'ensemble des classes d'isomorphisme des surfaces de Riemann de genre g . On le notera aussi \mathcal{R}_g .

On appellera *surface de Riemann marquée et modelée sur \mathcal{S}* , un couple (\mathfrak{R}, f) , où \mathfrak{R} est une surface de Riemann de genre g et $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{R}$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. On notera $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$, l'ensemble des surfaces marquées et modelées sur \mathcal{S} . On introduit la relation d'équivalence suivante sur $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$: $(\mathfrak{R}, f) \sim (\mathfrak{R}', f')$ si et seulement si $f \circ f'^{-1} : \mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}$ est biholomorphe. On notera alors $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}(\mathcal{S}) = \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})/\sim$, l'ensemble quotient obtenu et on a une application surjective $\phi : \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{R}_g$ définie par : $\phi([\mathfrak{R}, f]) = [\mathfrak{R}]$.

Soit $Diff_g^+ = Diff^+(\mathcal{S})$, l'ensemble des difféomorphismes $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ préservant l'orientation. C'est un groupe pour la composition. Il agit à droite sur $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ de la façon suivante : $(\mathfrak{R}, f) \cdot \alpha = (\mathfrak{R}, f \circ \alpha)$. Cette action est compatible avec la relation d'équivalence définie précédemment : $(\mathfrak{R}, f) \sim (\mathfrak{R}', f') \iff (\mathfrak{R}, f) \circ \alpha \sim (\mathfrak{R}', f') \circ \alpha$. On en déduit une action de $Diff_g^+$ sur \mathcal{M}_g : $[\mathfrak{R}, f] \cdot \alpha = [\mathfrak{R}, f \circ \alpha]$.

Proposition 3.1.1 $\phi : [\mathfrak{R}, f] \in \mathcal{M}_g \mapsto [\mathfrak{R}] \in \mathcal{R}_g$ est une application quotient pour l'action de $Diff_g^+$ sur \mathcal{M}_g .

Soit $Diff_g^0$ l'ensemble des difféomorphismes $\alpha \in Diff(\mathcal{S})$ homotopes à l'identité. C'est un sous-groupe discret de $Diff_g^+$ et $\mathcal{T}_g = \mathcal{M}_g/Diff_g^0$ va être l'espace de Teichmüller des surfaces de Riemann de genre g et de type τ . On note $Mod_g = Diff_g^0 \backslash Diff_g^+$ le groupe modulaire de genre g et de type τ . Il agit sur \mathcal{T}_g :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_g & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R}_g \\ & \searrow & \nearrow \pi \\ & \mathcal{T}_g & \end{array}$$

L'application π obtenue par la propriété universelle du quotient, est une application quotient pour l'action de Mod_g sur \mathcal{T}_g . Autrement dit, on a le

Théorème 3.1 π induit une bijection $\mathcal{T}_g/Mod_g \rightarrow \mathcal{R}_g$.

3.1.2 Coefficients et différentielles de Beltrami

Afin de pouvoir munir l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g d'une structure de variété analytique complexe, nous allons utiliser les différentielle de Beltrami. C'est pourquoi nous les introduisons ici. On pourra trouver plus de détails sur ce sujet dans [Nag88] ou [IT92].

Coefficients

Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2. On fixe une structure complexe ϕ sur V et un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire $z : V \rightarrow \mathbb{C}$ relativement à cette structure complexe. Soit $\varphi = [q]$ une structure conforme sur V . Si on pose $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z - \bar{z})$, alors $\{x, y\}$ est une base pour le dual réel de V . Donc il existe des réels a, b et c tels que $q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ et, q étant définie positive, $a, c > 0$ et $b^2 - ac < 0$. Maintenant il existe un unique couple (λ, μ) avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $|\mu| < 1$ tel que

$$q = \lambda \cdot |z + \mu\bar{z}|^2.$$

λ et μ peuvent s'exprimer de façon unique en fonction de a, b et c donc le nombre complexe μ est déterminé uniquement par la structure conforme φ . C'est le *coefficient de Beltrami* de φ .

Réciproquement, étant donné un nombre complexe μ avec $|\mu| < 1$, $q = |z + \mu\bar{z}|^2$ définit une forme quadratique définie positive sur V et donc une structure conforme $\varphi = [q]$ sur V dont le coefficient de Beltrami est μ .

On obtient ainsi une bijection entre le disque unité ouvert de \mathbb{C} et l'ensemble des structures conformes φ sur V muni d'une structure complexe et d'un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire vers \mathbb{C} .

Remarque: Le coefficient de Beltrami d'une structure conforme dépend fortement du choix de l'isomorphisme \mathbb{C} -linéaire. En effet, soit $z, z' : V \rightarrow \mathbb{C}$, deux isomorphismes \mathbb{C} -linéaires et φ une structure conforme sur V ayant μ et μ' pour coefficients de Beltrami par rapport à z et z' respectivement. Comme z et z' sont tous deux des isomorphismes \mathbb{C} -linéaires, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $z = \alpha z'$. Alors

$$|z + \mu\bar{z}|^2 = |\alpha|^2 \cdot |z' + \mu \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \bar{z}'|^2$$

D'où $\mu' = \mu \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2, ϕ une structure complexe sur V et $z : V \rightarrow \mathbb{C}$ un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire. Si φ est une structure conforme sur V de coefficient de Beltrami μ par rapport à ϕ et z , alors son coefficient de Beltrami relativement à la structure complexe $\bar{\phi}$ et à l'isomorphisme \bar{z} conjugués est $\bar{\mu}$.

Différentielles

Soit (\mathcal{S}, ϕ) une surface compacte presque complexe. \mathcal{S} est la structure différentielle d'une surface de Riemann \mathfrak{S} (cf. section 1.1.1). On note Ω le fibré en droite complexe des formes différentielles complexes sur \mathcal{S} et $\bar{\Omega}$ son fibré conjugué. Le fibré en droite $\Omega^{-1} \otimes \bar{\Omega}$ est un fibré vectoriel normé si on pose

$$\left\| \frac{d\bar{z}}{dz} \right\| = 1$$

pour toute coordonnée analytique locale z sur \mathfrak{S} . On considère alors la norme sup. notée $\|\cdot\|_\infty$, sur les sections globales de $\Omega^{-1} \otimes \bar{\Omega}$. Une *différentielle de Beltrami différentiable* sur \mathcal{S} est une section globale différentiable μ du fibré vectoriel $\Omega^{-1} \otimes \bar{\Omega}$ de norme $\|\mu\|_\infty \leq 1$. On notera par $C_{(-1,1)}^\infty(\mathcal{S})_1 = \mathcal{B}^\infty(\mathcal{S})$ l'ensemble des différentielles de Beltrami différentiables sur \mathcal{S} .

Soit φ une structure conforme quelconque sur \mathcal{S} . On associe alors à φ une différentielle de Beltrami différentiable μ de la manière suivante : Pour toute coordonnée analytique locale z , la différentielle $d_p z : T_p \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ en un point $p \in \mathcal{S}$ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire. D'après les résultats sur les coefficients, on obtient un coefficient de Beltrami $\mu_{z,p}$ de φ_p relativement à ϕ_p et $d_p z$ qui, par construction, varie de manière différentielle avec p . De plus la section locale $\mu_z \cdot \frac{d\bar{z}}{dz}$ de $\Omega^{-1} \otimes \bar{\Omega}$ ne dépend pas du choix de z . Comme \mathcal{S} est compacte, on obtient une section différentiable globale μ de $\Omega^{-1} \otimes \bar{\Omega}$ de norme $\|\mu\|_\infty < 1$, donc une différentielle de Beltrami différentiable. On appelle μ la *différentielle de Beltrami de la structure conforme φ* .

Réciproquement, si μ est une différentielle de Beltrami sur \mathcal{S} , on peut lui associer une structure conforme φ dont la différentielle de Beltrami différentiable est μ . En effet, dans une coordonnée analytique locale z , on a $\mu = \mu_z \cdot \frac{d\bar{z}}{dz}$ pour une certaine fonction différentiable μ_z . On définit alors localement $\varphi_z = [dz + \mu_z d\bar{z}]^2$ et la structure conforme φ sur \mathcal{S} obtenue ne dépend pas de z .

Proposition 3.1.2 *On obtient donc ainsi une bijection entre l'ensemble des structures conformes sur \mathcal{S} et l'ensemble des différentielles de Beltrami sur \mathcal{S} .*

Dilatations

Soit V un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe de référence ϕ_0 de structure conforme associée φ_0 (cf. section 1.1.3) et d'un morphisme \mathbb{C} -linéaire $z \mapsto \mathbb{C}$. Soit $L : V \rightarrow V'$, un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire, où V' est un espace vectoriel réel de dimension 2 muni d'une structure conforme φ' . La *dilatation complexe* μ_L de L est, par définition, le coefficient de Beltrami de la structure conforme induite $\varphi = L^*\varphi'$ et L est conforme par rapport à φ_0 et φ' si et seulement si $\mu_L = 0$.

La dilatation complexe de L peut être déterminée comme suit : Soit ϕ' , la structure complexe sur V' induite par la structure conforme φ' telle que L préserve l'orientation induite par ϕ_0 et ϕ' . Soit $z' : V' \rightarrow \mathbb{C}$ un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire relativement à ϕ' . Il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $L^*z' = \alpha z + \beta \bar{z}$. Comme L préserve l'orientation, $|\alpha| > |\beta|$ et comme $\alpha \neq 0$,

$$L^*|z'|^2 = |\alpha z + \beta \bar{z}|^2 = |\alpha|^2 \cdot |z + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \bar{z}|^2$$

D'où $\mu_L = \frac{\beta}{\alpha}$.

Remarque: Si h est différentiable, alors un calcul montre que la notion de dilatation circulaire ci-dessus et celle définie précédemment (cf. section 1.1.2) coïncident.

Soit μ la dilatation complexe de L et $q' = |z' + \mu \bar{z}'|$ une forme quadratique sur V' . Alors l'image par L du cercle unité $|z| = 1$ est une ellipse ont la longueur du plus petit des deux demi-axes est $1 - |\mu|$ et celle du plus grand $1 + |\mu|$. On définit alors la *dilatation circulaire* γ_L de L comme :

$$\gamma_L = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|}.$$

γ_L est un nombre réel supérieur ou égal à 1. De plus, $\gamma_L = 1$ si et seulement si L est conforme par rapport à φ_0 et φ' .

Soit (\mathcal{S}, ϕ) une surface différentiable compacte presque complexe, $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ un difféomorphisme local et φ' une structure conforme sur \mathcal{S}' . On obtient alors une structure conforme induite $\varphi = f^*\varphi'$ sur \mathcal{S} . Sa différentielle de Beltrami, μ_f est appelée *dilatation complexe de f* .

Proposition 3.1.3 *f est conforme si et seulement si sa dilatation complexe est identiquement nulle.*

On peut obtenir explicitement la différentielle de Beltrami du difféomorphisme local f . En effet, soit ϕ' une structure presque complexe sur \mathcal{S}' telle que φ' soit la structure conforme induite par ϕ' et f préserve l'orientation relativement à ϕ et ϕ' . Une telle structure presque complexe existe toujours, au moins localement. Soit z' une coordonnée analytique locale sur \mathcal{S}' . Comme $f^*dz' = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$, d'après les résultats sur les coefficients, on obtient localement :

$$\mu_f = \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \cdot \frac{d\bar{z}}{dz}$$

Soit μ la dilatation complexe du difféomorphisme local f . On définit la *dilatation circulaire de f* comme le nombre réel :

$$\gamma_f = \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}.$$

3.1.3 Structure des espaces de Teichmüller des surfaces de Riemann

Soit \mathcal{G} , une surface de Riemann de genre g et \mathcal{S} la surface différentiable sous-jacente. On note \mathcal{I}_g , l'ensemble des structures presque complexes sur \mathcal{S} induisant la même orientation que celle donnée par \mathcal{G} et Φ_g l'ensemble des structures conformes sur \mathcal{S} . Si \mathcal{R} est une surface de Riemann, on note $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ la structure presque complexe sur la surface différentiable sous-jacente \mathcal{R} , déduite de la structure de surface de Riemann (voir proposition 1.1.6). On définit alors une application :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_g &\longrightarrow \mathcal{I}_g \\ (\mathcal{R}, f) &\longmapsto f^*(\mathcal{I}_{\mathcal{R}}) \end{aligned}$$

Cette application est compatible avec la relation d'équivalence \sim sur $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$. Elle induit donc une application $\mathcal{M}_g = \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})/\sim \longrightarrow \mathfrak{I}_g$.

Proposition 3.1.4 *L'application $[(\mathfrak{R}, f)] \in \mathcal{M}_g \longmapsto f^*(\mathcal{I}_{\mathfrak{R}}) \in \mathfrak{I}_g$ est une bijection.*

Preuve: Injectivité: Soient $(\mathfrak{R}, f), (\mathfrak{R}', f') \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ ayant même image dans \mathfrak{I}_g .

$$(f' \circ f^{-1})^* \mathcal{I}_{\mathfrak{R}'} = (f^{-1})^* (f'^* \mathcal{I}_{\mathfrak{R}'}) = (f^{-1})^* (f^* \mathcal{I}_{\mathfrak{R}}) = \mathcal{I}_{\mathfrak{R}}$$

Ce qui signifie que $f' \circ f^{-1}$ est holomorphe.

Surjectivité: Soit $\mathcal{I} \in \mathfrak{I}_g$. Elle induit une structure de surface de Riemann, $\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}$ sur \mathcal{S} (proposition 1.1.6) et \mathcal{I} est l'image dans \mathfrak{I}_g de $[(\mathfrak{S}_{\mathcal{I}}, Id)]$ \square

Le théorème 1.5 et les propositions 3.1.2 et 3.1.4 nous donnent alors les correspondances bijectives:

$$\mathcal{M}_g \longleftrightarrow \mathfrak{I}_g \longleftrightarrow \Phi_g \longleftrightarrow C_{(-1,1)}^{\infty}(\mathcal{S})_1.$$

Ces bijections étant compatibles avec l'action de $Diff_g^+$ sur \mathcal{M}_g , celle-ci induit une action sur \mathfrak{I}_g , sur Φ_g et sur $C_{(-1,1)}^{\infty}(\mathcal{S})_1$. En particulier, $Diff_g^0$ agit sur $C_{(-1,1)}^{\infty}(\mathcal{S})_1$ ce qui nous donne le théorème suivant:

Théorème 3.2 *Soit \mathfrak{S} une surface de Riemann de genre g . On a une bijection entre l'espace de Teichmüller T_g et $C_{(-1,1)}^{\infty}(\mathcal{S})_1/Diff_g^0$.*

Afin d'obtenir une structure analytique complexe sur les espaces de Teichmüller des surfaces de Riemann, on va considérer le complété de $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S}) : L_{(-1,1)}^{\infty}(\mathcal{S})_1 = \mathcal{B}(\mathcal{S})$. D'après ce qui précède, on a une application injective $\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{S})$.

Soit $\widehat{\mathcal{M}}_g = \{[\mathfrak{R}, f] \mid f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R} \text{ homéomorphisme quasi-conforme préservant l'orientation}\}$. On peut définir sur $\widehat{\mathcal{M}}_g$ la même relation d'équivalence \sim que sur $\widetilde{\mathcal{M}}_g$ (cf. section 3.1.1). On note alors $\overline{\mathcal{M}}_g = \widehat{\mathcal{M}}_g/\sim$. La proposition suivante donne l'analogie de la bijection obtenue entre \mathcal{M}_g et $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$:

Proposition 3.1.5 *L'application $[(\mathfrak{R}, f)] \in \overline{\mathcal{M}}_g \longmapsto \mu_f \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ est une bijection.*

Preuve: Injectivité: Si $(\mathfrak{R}, f), (\mathfrak{R}', f') \in \widehat{\mathcal{M}}_g$ vérifient $\mu_f = \mu_{f'}$, alors $f' \circ f^{-1}$ est conforme donc holomorphe et $[(\mathfrak{R}, f)] = [(\mathfrak{R}', f')]$

Surjectivité: Soit $\mu \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ et $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$ un atlas. On considère $(U, \mathfrak{z}_U) \in \mathfrak{A}$ une carte et on pose $U' = \mathfrak{z}_U(U) \subseteq \mathbb{C}$. Alors μ définie une différentielle de Beltrami μ_U sur U' que l'on prolonge par 0 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en $\mu_U' \in L^{\infty}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))_1$. D'après le théorème de Bers-Ahlfors (1.4), il existe un unique homéomorphisme quasi-conforme $h_U : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ayant pour dilatation μ_U' . Soit $(V, \mathfrak{z}_V) \in \mathfrak{A}$ une autre carte de \mathfrak{S} telle que $U \cap V \neq \emptyset$ et $h_V : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'unique homéomorphisme quasi-conforme obtenu comme précédemment. Les homéomorphismes $(h_U \circ \mathfrak{z}_U)|_{U \cap V}$ et $(h_V \circ \mathfrak{z}_V)|_{U \cap V}$ ont par construction même dilatation donc $(h_V \circ \mathfrak{z}_V) \circ (h_U \circ \mathfrak{z}_U)^{-1}$ est holomorphe. Alors $\mathfrak{A}' = (U, h_U \circ \mathfrak{z}_U)_{(U, \mathfrak{z}_U) \in \mathfrak{A}}$ donne une structure de surface de Riemann \mathfrak{S}' sur \mathcal{S} qui par construction est indépendante du choix de l'atlas $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}$ et $Id : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$ est un homéomorphisme presque conforme de dilatation μ . Par conséquent, l'image de $[(\mathfrak{S}, Id)]$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ est μ . \square

Soit \mathcal{S} une surface compacte différentiable orientée. On note $Q^+(\mathcal{S})$ l'ensemble des homéomorphismes $h : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ préservant l'orientation qui sont quasi-conformes. C'est un groupe pour la composition. On note alors $Q^{+,0}(\mathcal{S})$ le sous-groupe de $Q^+(\mathcal{S})$ des homéomorphismes homotopes à l'identité.

$Q^+(\mathcal{S})$ agit à droite sur $\overline{\mathcal{M}}_g$ de façon identique à l'action de $Diff_g^+$ sur \mathcal{M}_g et la prolonge. Par transport de structure, on obtient une action de $Q^+(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ qui prolonge l'action de $Diff_g^+$ sur $\mathcal{B}^{\infty}(\mathcal{S})$.

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}_g & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathcal{B}(\mathcal{S}) \simeq \overline{\mathcal{M}}_g & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{T}_g = \mathcal{M}_g / \text{Diff}_g^0 \end{array}$$

L'application $\overline{\mathcal{M}}_g \rightarrow \mathcal{T}_g$ est un quotient pour l'action de $Q^{+,0}(\mathcal{S})$ sur $\overline{\mathcal{M}}_g$. Comme $\overline{\mathcal{M}}_g \simeq \mathcal{B}(\mathcal{S})$ de façon compatible avec l'action de $Q^+(\mathcal{S})$, on obtient :

$$\mathcal{T}_g \simeq \mathcal{B}(\mathcal{S}) / Q^{+,0}(\mathcal{S})$$

L'ensemble des différentielles de Beltrami sur \mathcal{S} , $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = L_{(-1,1)}^\infty(\mathcal{S})_1$ étant un ouvert dans un espace de Banach complexe est une variété complexe de Banach. De plus l'action de $Q^+(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ est holomorphe et fidèle. Et on obtient finalement une structure de variété analytique complexe sur \mathcal{T}_g .

3.2 Introduction aux espaces de Teichmüller des surfaces conformes

3.2.1 Définitions

Soit \mathcal{S} une surface compacte différentiable de genre g et de type τ . L'espace $\mathcal{S}(\mathcal{S})$ des modules de \mathcal{S} est l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces conformes de genre g et τ . On le notera aussi $\mathcal{S}_{g,\tau}$, car si \mathcal{S}' est une autre surface différentiable de genre g et de type τ , alors $\mathcal{S}(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}(\mathcal{S}')$.

On appellera *surface conforme marquée et modelée* sur \mathcal{S} un triplet $(\mathcal{X}, \varphi, f)$, où (\mathcal{X}, φ) est une surface conforme de genre g et de type τ et $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ est un difféomorphisme tel que $f(\partial\mathcal{S}) \subseteq \partial\mathcal{X}$. On notera $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ l'ensemble des surfaces marquées et modelées sur \mathcal{S} . On introduit la relation d'équivalence suivante sur $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$: $(\mathcal{X}, \varphi, f) \sim (\mathcal{X}', \varphi', f')$ si et seulement si $f \circ f'^{-1} : (\mathcal{X}', \varphi') \rightarrow (\mathcal{X}, \varphi)$ est un isomorphisme conforme. On notera $\mathcal{M}_{g,\tau} = \mathcal{M}(\mathcal{S}) = \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) / \sim$, l'ensemble quotient obtenu. On a alors une application surjective $\phi : \mathcal{M}_{g,\tau} \rightarrow \mathcal{S}_{g,\tau}$ définie par : $\phi([\mathcal{X}, \varphi, f]) = [\mathcal{X}, \varphi]$.

Soit $\text{Diff}_{g,\tau} = \text{Diff}(\mathcal{S})$, l'ensemble des difféomorphismes $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ avec $\alpha(\partial\mathcal{S}) = \partial\mathcal{S}$. C'est un groupe pour la composition. Il agit à droite sur $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$ de la façon suivante : $(\mathcal{X}, \varphi, f) \cdot \alpha = (\mathcal{X}, \varphi, f \circ \alpha)$. Cette action est compatible avec la relation d'équivalence définie précédemment : $(\mathcal{X}, \varphi, f) \sim (\mathcal{X}', \varphi', f') \iff (\mathcal{X}, \varphi, f \circ \alpha) \sim (\mathcal{X}', \varphi', f' \circ \alpha)$. On en déduit une action de $\text{Diff}(\mathcal{S})$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{S})$: $[\mathcal{X}, \varphi, f] \cdot \alpha = [\mathcal{X}, \varphi, f \circ \alpha]$.

Proposition 3.2.1 $\phi : [\mathcal{X}, \varphi, f] \in \mathcal{M}_{g,\tau} \mapsto [\mathcal{X}, \varphi] \in \mathcal{S}_{g,\tau}$ est une application quotient pour l'action de $\text{Diff}_{g,\tau}$ sur $\mathcal{M}_{g,\tau}$

Soit $\text{Diff}_{g,\tau}^0$ l'ensemble des difféomorphismes $\alpha \in \text{Diff}_{g,\tau}$ homotopes à l'identité. C'est un sous-groupe discret de $\text{Diff}_{g,\tau}$ et $\mathcal{T}_{g,\tau} = \mathcal{M}_{g,\tau} / \text{Diff}_{g,\tau}^0$ va être l'espace de Teichmüller des surfaces conformes compactes de genre g et de type τ . On appellera $\text{Mod}_{g,\tau} = \text{Diff}_{g,\tau}^0 \backslash \text{Diff}_{g,\tau}$ le groupe modulaire de genre g et de type τ . Il agit sur $\mathcal{T}_{g,\tau}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{g,\tau} & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \mathcal{S}_{g,\tau} \\ & \searrow & \nearrow \pi \\ & \mathcal{T}_{g,\tau} & \end{array}$$

L'application π , obtenue par la propriété universelle du quotient, est une application quotient pour l'action de $\text{Mod}_{g,\tau}$ sur $\mathcal{T}_{g,\tau}$. Autrement dit, on a le

Théorème 3.3 π induit une bijection $\mathcal{T}_{g,\tau} / \text{Mod}_{g,\tau} \rightarrow \mathcal{S}_{g,\tau}$.

3.2.2 Une autre vision de l'espace de Teichmüller

Mise en place

Soit \mathcal{S} une surface différentiable de genre g et de type τ . On choisit un point de base $p_0 \in \mathcal{S}$ et on note $\Pi_1(\mathcal{S}) = \Pi_1(\mathcal{S}, p_0)$ le groupe fondamental de \mathcal{S} basé en p_0 . Si (\mathcal{X}, ψ) est une surface conforme de même genre g et de même type τ que \mathcal{S} , on appelle *surface conforme marquée sur \mathcal{S}* une suite $(\mathcal{X}, \psi, p, F)$ telle que (\mathcal{X}, ψ) est une surface conforme, $p \in \mathcal{X}$ un point et $F : \Pi_1(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\mathcal{X}, p)$ un isomorphisme qui préserve le bord (voir section 2.2.3). On note $\mathcal{M}'(\mathcal{S})$ cet ensemble.

Deux éléments $(\mathcal{X}, \psi, p, F), (\mathcal{X}', \psi', q, G) \in \mathcal{M}'(\mathcal{S})$ sont équivalents si il existe un difféomorphisme $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ homotope à l'identité tel que $\alpha(p) = q$ et $\alpha_* \circ F = G$.

On dira que deux éléments $(\mathcal{X}, \psi, p, F)$ et $(\mathcal{X}', \psi', p', F')$ de $\mathcal{M}'(\mathcal{S})$ sont équivalents si il existe un isomorphisme conforme $f : (\mathcal{X}, \psi) \rightarrow (\mathcal{X}', \psi')$ tel que $(\mathcal{X}', \psi', f(p), f_* \circ F)$ et $(\mathcal{X}', \psi', p', F')$ sont équivalents. C'est une relation d'équivalence et on notera $[\mathcal{X}, \psi, p, F]$ la classe d'équivalence de $(\mathcal{X}, \psi, p, F)$ pour cette relation. On sait que pour tout $q \in \mathcal{S}$, le groupe fondamental $\Pi_1(\mathcal{S}, p)$ de \mathcal{S} basé en p est isomorphe au groupe fondamental $\Pi_1(\mathcal{S}, q)$ de \mathcal{S} basé en q . Donc l'ensemble obtenu ne dépend pas du choix du point de base $p_0 \in \mathcal{S}$. On note alors

$$\mathcal{T}'(\mathcal{S}) = \left\{ [\mathcal{X}, \psi, p, F] \mid (\mathcal{X}, \psi) \text{ surface conforme, } p \in \mathcal{X} \text{ et } F : \Pi_1(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1(\mathcal{X}) \text{ isomorphisme} \right\}.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{On a une application : } & \tau : \mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}_{g,\tau} & \longrightarrow & \mathcal{T}'(\mathcal{S}) \\ & [\mathcal{X}, \psi, f] & \longmapsto & [\mathcal{X}, \psi, f(p_0), f_*] \end{array}$$

Elle est bien définie: $f(\partial\mathcal{S}) = \partial\mathcal{X}$ donc f_* préserve le bord. De plus si $(\mathcal{X}, \psi, f) \sim (\mathcal{X}', \psi', f')$, cela signifie qu'il existe un difféomorphisme α homotope à l'identité tel que $h = f' \circ \alpha \circ f^{-1}$ est un morphisme conforme. Il vient alors $h(f(p_0)) = f' \circ \alpha(p_0) = f' \circ \alpha \circ f^{-1}(f(p_0))$ et $h_* \circ f_* = (f' \circ \alpha \circ f^{-1})_* \circ f_* = f'_* \circ \alpha_* = (f' \circ \alpha \circ f^{-1})_* \circ f'_*$. Donc $(\mathcal{X}, \psi, f(p_0), f_*)$ et $(\mathcal{X}', \psi', f'(p_0), f'_*)$ sont équivalents.

Le but de cette section est de montrer, via τ , que $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \mathcal{T}'(\mathcal{S})$

Les résultats

Injectivité de τ : Soit $[\mathcal{X}, \psi, f], [\mathcal{X}', \psi', f'] \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ telles que $\tau([\mathcal{X}, \psi, f]) = \tau([\mathcal{X}', \psi', f'])$. En particulier, il existe un isomorphisme conforme de $g : (\mathcal{X}', \psi') \rightarrow (\mathcal{X}, \psi)$ tel que $(\mathcal{X}, \psi, g \circ f(p_0), g_* \circ f'_*)$ et $(\mathcal{X}, \psi, f(p_0), f_*)$ soient équivalentes. On voit que l'on peut alors se placer dans le cas particulier où $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ et $\psi = \psi'$. Le fait que $(\mathcal{X}, \psi, f(p_0), f_*)$ et $(\mathcal{X}, \psi, f'(p_0), f'_*)$ soient équivalentes signifie qu'il existe un difféomorphisme $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ homotope à l'identité tel que $\alpha \circ f'(p_0) = f(p_0)$ et $\alpha_* \circ f'_* = f_*$. Si on pose $\alpha' = f'^{-1} \circ \alpha \circ f' : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, on obtient $f' \circ \alpha' \circ f^{-1}(f(p_0)) = f(p_0)$ et $(f' \circ \alpha' \circ f^{-1})_* = id_{\Pi_1(\mathcal{S}, f(p_0))}$. On note alors $\beta = f' \circ \alpha' \circ f^{-1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. C'est un difféomorphisme homotope à l'identité (voir [ZVC70]). Alors $\beta' = f'^{-1} \circ \beta \circ f' : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est homotope à l'identité et $h = id = f' \circ \beta' \circ f^{-1}$ est un morphisme conforme. Donc $[\mathcal{X}, \psi, f] = [\mathcal{X}, \psi, f']$.

Surjectivité de τ : Soit $[\mathcal{S}, \psi, p_0, F] \in \mathcal{T}'(\mathcal{S})$. Il existe un homéomorphisme $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que $f_* = F$ (voir [ZVC70]). En utilisant un théorème donné par M. Hirsch [Hir76], on peut déformer f homotopiquement en un difféomorphisme $f' : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$. Alors $[\mathcal{S}, \psi, p_0, F] = [\mathcal{S}, \psi, p_0, f'_*]$.

3.2.3 Coordonnées

Soit (\mathcal{S}, φ) une surface conforme de genre g et de type $\tau = \pm k$, telle que $\tilde{g}(g, \tau) \geq 2$. En utilisant la bijection établie dans la section 3.2.2 précédente, ainsi que les résultats de la section 2.2 (en particulier le 2.2.3), on voit que l'on peut associer à chaque point $[\mathcal{X}, \psi, f]$ de $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ un sous-groupe discret de $\text{Aut}(\mathbb{H})$, que l'on appellera *modèle C.N.E de $[\mathcal{X}, \psi, f]$* . Celui-ci est défini à conjugaison près et est donné par des équations (2.11) où, pour $i = 1$ à g et $j = 1$ à k , les $A_i = a_i, B_i = b_i, E_j = e_j$ sont hyperboliques et les $D_i = d_j$ sont des glissements. Ceci va nous permettre de trouver des coordonnées pour $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

Détermination

De façon à imposer un unique modèle C.N.E. à un point $[\mathcal{X}, \psi, f]$ donné, on introduit les conditions de normalisation :

Cas 1) Si Γ est orientable avec $g \geq 1$:

- (i) Les points fixes répulsif et attractif de b_g sont 0 et ∞ respectivement.
- (ii) Le point fixe attractif de a_g est 1.

Cas 2) Si Γ est non-orientable avec $g \geq 2$:

- (i) Les points fixes répulsif et attractif de d_{g-1} sont 0 et ∞ respectivement.
- (ii) Le point fixe attractif de d_g est 1.

Cas 3) Si ni 1) ni 2) n'est vérifié, i.e. $(g, \tau) = (0, +k)$, $k \geq 3$ ou $(g, \tau) = (1, -k)$, $k \geq 2$:

- (i) Les points fixes répulsif et attractif de e_{k-1} sont 0 et ∞ respectivement.
- (ii) Le point fixe attractif de e_k est 1.

Pour un élément $[\mathcal{X}, \psi, f] \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$, il existe toujours un modèle C.N.E satisfaisant les conditions de normalisation. En effet, si h et h' désignent a_g, d_g ou e_k et b_g, d_{g-1} ou e_{k-1} respectivement, selon que l'on est dans le cas 1), 2) ou 3), alors h et h' sont des éléments hyperboliques généraux (voir section 2.1.2). Comme h et h' ne commutent pas, on a $\text{Fixe}(h) \neq \text{Fixe}(h')$ (lemme 2.1.3) donc $\text{Fixe}(h) \cap \text{Fixe}(h') = \emptyset$ (lemme 2.1.4). Alors quitte à conjuguer Γ par un élément de $\text{Aut}(\mathbb{H})$, on peut supposer que h et h' satisfont les conditions de normalisation.

Proposition 3.2.2 *Soit (\mathcal{X}, ψ, f) une surface conforme marquée et modelée sur (\mathcal{S}, φ) . Un système canonique de générateurs d'un modèle C.N.E. satisfaisant les conditions de normalisation est uniquement déterminé par le point $[\mathcal{X}, \psi, f] \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$.*

Preuve: Soit $(\mathcal{X}', \psi', f')$ une autre surface marquée et modelée sur (\mathcal{S}, φ) telle que $[\mathcal{X}, \psi, f] = [\mathcal{X}', \psi', f'] \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$. Cela signifie qu'il existe un isomorphisme conforme $h : (\mathcal{X}, \psi) \rightarrow (\mathcal{X}', \psi')$ tel que $(\mathcal{X}', \psi', f'_*)$ soit équivalent à $(\mathcal{X}', \psi', h_* \circ f_*)$. On peut remonter h en un automorphisme $\tilde{h} \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ tel que: $\gamma' = \tilde{h} \circ \gamma \circ \tilde{h}^{-1}$, où $\gamma = a_i$ (resp. b_i, d_i ou e_j) et $\gamma' = a'_i$ (resp. b'_i, d'_i ou e'_j). D'après les conditions (i), on a $\tilde{h}(z) = \lambda z$ ou $\tilde{h}(z) = -\lambda \bar{z}$, $\lambda > 0$, selon que \tilde{h} préserve ou non l'orientation de \mathbb{H} . Les conditions (ii) indiquent que $\tilde{h}(1) = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\tilde{h} = id$. D'où le résultat. \square

On appellera le groupe C.N.E. obtenu dans la proposition 3.2.2 précédente, *le modèle C.N.E normalisé de $[\mathcal{X}, \psi, f]$* . Le système de générateurs

$$\begin{cases} \{a_i, b_i, e_j\}_{\substack{i=1 \text{ à } g \\ j=1 \text{ à } k}}, & \text{si } \Gamma \text{ est orientable} \\ \{d_i, e_j\}_{\substack{i=1 \text{ à } g \\ j=1 \text{ à } k}}, & \text{si } \Gamma \text{ est non-orientable} \end{cases}$$

est appelé *son système de générateurs canonique*. Ils vérifie l'unique relation fondamentale:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^k e_j &= id, & \text{si } \Gamma \text{ est orientable} \\ \prod_{i=1}^g d_i^2 \prod_{j=1}^k e_j &= id, & \text{si } \Gamma \text{ est non-orientable} \end{aligned}$$

où $[a, b] = a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1}$.

Espaces de Fricke

Lemme 3.2.1 Soit $\mathcal{E} = \{a_i, b_i, e_j\}_{i=1 \text{ à } g, j=1 \text{ à } k}$ si Γ est orientable, $\mathcal{E} = \{d_i, e_j\}_{i=1 \text{ à } g, j=1 \text{ à } k}$ si Γ non orientable, un système de générateurs pour le modèle C.N.E normalisé d'un point $[\mathcal{X}, \psi, f] \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$. Si un élément $\gamma \in \mathcal{E}$ est différent de $\gamma_0 = b_g$ dans le cas 1) (resp. $\gamma_0 = d_{g-1}$ dans le cas 2) ou $\gamma_0 = e_{k-1}$ dans le cas 3)) de représentation matricielle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $bc \neq 0$.

Preuve: Dans le cas où $b = c = 0$, on a $\text{Fixe}(\gamma) = \text{Fixe}(\gamma_0) = \{0, \infty\}$, donc γ et γ_0 commutent d'après le lemme 2.1.3, ce qui est exclu.

Si $b = 0$ et $c \neq 0$ (resp. $b \neq 0$ et $c = 0$), on obtient $\text{Fixe}(\gamma) \cap \text{Fixe}(\gamma_0) = \{0\}$ (resp. $\text{Fixe}(\gamma) \cap \text{Fixe}(\gamma_0) = \{\infty\}$). Or ceci est impossible d'après le lemme 2.1.4. \square

Le système canonique de générateurs du modèle C.N.E. normalisé Γ pour un point $[\mathcal{X}, \psi, f] \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$, s'écrit uniquement de la forme :

$$\begin{cases} \{f_{A_i}, f_{B_i}, f_{E_j}\}_{i=1 \text{ à } g, j=1 \text{ à } k}, & \text{si } \Gamma \text{ est orientable} \\ \{f_{D_i}, f_{E_j}\}_{i=1 \text{ à } g, j=1 \text{ à } k}, & \text{si } \Gamma \text{ est non-orientable} \end{cases}$$

où A_i, B_i, D_i et E_j sont les représentations matricielles de a_i, b_i, d_i et e_j respectivement. D'après le lemme 3.2.1,

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} a_i & a'_i \\ a''_i & a'''_i \end{pmatrix} & a_i, a'_i, a''_i, a'''_i \in \mathbb{R}, \quad a''_i > 0, \quad \det(A_i) = 1 \\ B_i &= \begin{pmatrix} b_i & b'_i \\ b''_i & b'''_i \end{pmatrix} & b_i, b'_i, b''_i, b'''_i \in \mathbb{R}, \quad b''_i > 0, \quad \det(B_i) = 1 \\ D_i &= \begin{pmatrix} d_i & d'_i \\ d''_i & d'''_i \end{pmatrix} & d_i, d'_i, d''_i, d'''_i \in \mathbb{R}, \quad d''_i > 0, \quad \det(D_i) = -1 \\ E_j &= \begin{pmatrix} e_j & e'_j \\ e''_j & e'''_j \end{pmatrix} & e_j, e'_j, e''_j, e'''_j \in \mathbb{R}, \quad e''_j > 0, \quad \det(E_j) = 1 \end{aligned}$$

pour $i = 1$ à $g-1$ et $j = 1$ à k dans le cas 1), $i = 1$ à $g-2$ et $j = 1$ à k dans le cas 2), $i = 1$ à g et $j = 1$ à $k-2$ dans le cas 3).

On définit alors les *coordonnées de Fricke*, $\mathfrak{F}_{g,\tau} : \mathcal{T}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}^{6g+3k-6}$ (resp. $\mathbb{R}^{3g+3k-6}$) si \mathcal{S} est orientable (resp. \mathcal{S} non-orientable) par :

Cas 1) Si Γ est orientable avec $g \geq 1$

$$\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f]) = \left((a_i, a''_i, a'''_i)_{i=1}^{g-1}, (b_i, b''_i, b'''_i)_{i=1}^{g-1}, (e_j, e''_j, e'''_j)_{j=1}^k \right)$$

Cas 2) Si Γ est non-orientable avec $g \geq 2$

$$\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f]) = \left((d_i, d''_i, d'''_i)_{i=1}^{g-2}, (e_j, e''_j, e'''_j)_{j=1}^k \right)$$

Cas 3) a) Si $g = 0, \tau = +k, k \geq 3$

$$\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f]) = \left((e_j, e''_j, e'''_j)_{j=1}^{k-2} \right)$$

b) Si $g = 1, \tau = -k, k \geq 2$

$$\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f]) = \left((d_1, d''_1, d'''_1), (e_j, e''_j, e'''_j)_{j=1}^{k-2} \right)$$

L'image $\mathcal{F}_{g,\tau} = \mathfrak{F}_{g,\tau}(\mathcal{T}(\mathcal{S}))$ est appelé *espace de Fricke des surfaces conformes de genre g et de type τ* . La topologie de $\mathbb{R}^{6g+3k-6}$ si \mathcal{S} est orientable (resp. $\mathbb{R}^{3g+3k-6}$ si \mathcal{S} est non-orientable) induit une topologie sur $\mathcal{T}_{g,\tau}$. Par le théorème 3.4 suivant, $\mathfrak{F}_{g,\tau} : \mathcal{T}_{g,\tau} \rightarrow \mathcal{F}_{g,\tau}$ est une bijection. Elle permet alors de définir une topologie sur $\mathcal{T}_{g,\tau}$ en identifiant $\mathcal{T}_{g,\tau}$ et $\mathcal{F}_{g,\tau}$.

Théorème 3.4 $\mathfrak{F}_{g,\tau} : \mathcal{T}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}^{6g+3k-6}$ (resp. $\mathbb{R}^{3g+3k-6}$) si \mathcal{S} est orientable (resp. \mathcal{S} non-orientable) est injective.

Preuve: Nous devons montrer que tout point $\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f]) \in \mathcal{F}_{g,\tau}$ détermine de façon unique le système de générateurs du modèle C.N.E. normalisé Γ pour le point $[\mathcal{X}, \psi, f] \in \mathcal{T}_{g,\tau}$.

Pour $i = 1$ à $g-1$, dans le cas 1), a'_i (resp. b'_i) est obtenu par la relation $a_i a''_i - a'_i a''_i = 1$ (resp. $b_i b''_i - b'_i b''_i = 1$) avec $a''_i > 0$ (resp. $b''_i > 0$). Par le même argument, e'_j est aussi déterminé pour $j = 1$ à k dans les cas 1) et 2), $j = 1$ à $k-2$ dans le cas 3). De la même façon, on détermine d'_i pour $i = 1$ à $g-2$ dans le cas 2) et $i = 1$ dans le cas 3) a).

Il reste donc à montrer que A_g et B_g dans le cas 1), D_{g-1} et D_g dans le cas 2) et E_{k-1} et E_k dans le cas 3) sont uniquement déterminées par $\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f])$.

Cas 1) Par la condition de normalisation (i), $f_{B_g}(z) = \lambda z$ avec $\lambda > 1$. La condition de normalisation (ii) indique que :

$$a_g + a'_g = a''_g + a'''_g \quad (3.1)$$

De plus, par la relation fondamentale $\prod_{j=1}^k E_j \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = Id$, on obtient $H A_g = B_g A_g B_g^{-1}$, où $H = \prod_{j=1}^k E_j \prod_{i=1}^{g-1} [A_i, B_i] = \begin{pmatrix} h & h' \\ h'' & h''' \end{pmatrix}$. D'où les équations:

$$(h-1)a_g + h'a''_g = 0 \quad (3.2)$$

$$h''a_g + (h''' - \lambda^{-1})a''_g = 0 \quad (3.3)$$

$$h''a'_g + (h''' - 1)a'''_g = 0 \quad (3.4)$$

Comme $\det A_g \neq 0$ est non constante, on ne peut avoir $a_g = a''_g = 0$. Donc les équations (3.2) et (3.3) induisent $h-1 = \lambda(1-h''')$. Si $h = 1$, alors $h''' = 1$ donc f_H est parabolique, ce qui est exclu car Γ est un groupe surfacique. Donc $h \neq 1$, $h''' \neq 1$ et $\lambda = \frac{h-1}{h'''-1}$, ce qui détermine B_g .

A partir des équations (3.2), (3.4) et (3.1), on obtient :

$$\frac{h+h'-1}{1-h}a''_g = \frac{h''+h'''-1}{1-h'''}a'_g$$

Si $h''+h''' = 1$, alors $h+h' = 1$ puisque $a''_g \neq 0$ (lemme 3.2.1). Dans ce cas, $\det H = 1$ implique que $h+h''' = 2$, donc H est hyperbolique. Ceci est exclu car Γ est un groupe surfacique. Ainsi A_g est entièrement déterminée par $\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f])$.

Cas 2) Par la condition de normalisation (i), $f_{D_{g-1}}(z) = -\lambda \bar{z}$ avec $\lambda > 1$, donc $D_{g-1}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$. Si $D_g^2 = \begin{pmatrix} d & d' \\ d'' & d''' \end{pmatrix}$, 1 est aussi point fixe de $f_{D_g^2}$ (condition de normalisation (ii)) et

$$d + d' = d'' + d''' \quad (3.5)$$

De plus, par la relation fondamentale $\prod_{j=1}^k E_j \prod_{i=1}^g D_i^2 = Id$, on obtient $H D_{g-1}^2 = D_g^{-2}$, où $H = \prod_{j=1}^k E_j \prod_{i=1}^{g-2} D_i^2 = \begin{pmatrix} h & h' \\ h'' & h''' \end{pmatrix}$. On obtient les équations:

$$d = \lambda h''' \quad (3.6)$$

$$d' = -h'/\lambda \quad (3.7)$$

$$d'' = -\lambda h'' \quad (3.8)$$

$$d''' = h/\lambda \quad (3.9)$$

En remplaçant d , d' , d'' et d''' dans l'équation (3.5) à l'aide des égalités (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) respectivement, il vient

$$h + h' = \lambda^2(h'' + h''') \quad (3.10)$$

Le cas $h'' = -h'''$ implique $h = -h'$ et alors $\det H = h h''' - h' h'' = 0$ ce qui est impossible. Sachant que $\lambda > 0$, l'équation (3.10) détermine entièrement D_{g-1} .

Les égalités (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) déterminent alors D^2 . Il existe un élément $f_G \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ tel que $(f_G \circ f_{D_g} \circ f_G^{-1})^2(z) = f_G \circ f_{D_g} \circ f_G^{-1}(z) = \mu z$, pour un certain $\mu > 0$. Comme f_{D_g} inverse l'orientation, $f_G \circ f_{D_g} \circ f_G^{-1}$ aussi et $f_G \circ f_{D_g} \circ f_G^{-1}(z) = -\sqrt{\mu}z$, ce qui détermine D_g de façon unique.

Cas 3) Par la condition de normalisation (i), $E_{g-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda > 1$. La condition de normalisation (ii) implique

$$e_k + e'_k = e''_k + e'''_k$$

De plus, par la relation fondamentale $\prod_{j=1}^k E_j = Id$, dans le cas 3)a), $D_1^2 \prod_{j=1}^k E_j = Id$, dans le cas 3)b) on obtient $H E_{k-1} = E_k$, où $H = \prod_{j=1}^{k-2} E_j$ dans le cas 3)a), $H = D_1^2 \prod_{j=1}^{k-2} E_j$ dans le cas 3)b). On raisonne alors comme pour le cas 2), E_k jouant le rôle de D_g^2 et E_{k-1} celui de G_{g-1}^2 . Ainsi E_k et E_{k-1} sont déterminés par $\mathfrak{F}_{g,\tau}([\mathcal{X}, \psi, f])$. \square

3.3 Structure sur les espaces de Teichmüller des surfaces conformes

3.3.1 Les espaces

Structure de l'espace des modules

Nous allons munir l'ensemble $\mathcal{S}_{g,\tau}$ d'une structure topologique.

Notons $\Phi(\mathcal{S})$, l'ensemble des structures conformes sur une surface différentiable \mathcal{S} de genre g et de type τ . On a alors une inclusion évidente $\rho : \Phi(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}_{g,\tau}$ définie de la façon suivante : $\varphi \in \Phi(\mathcal{S}) \mapsto [\mathcal{S}, \varphi]$.

De plus, l'application ρ est surjective. En effet, soit $[\mathcal{X}, \varphi] \in \mathcal{S}_{g,\tau}$ et $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ un difféomorphisme. Alors $f^*\varphi$ est une structure conforme sur \mathcal{S} telle que $\rho(f^*\varphi) = [\mathcal{X}, \varphi]$.

Théorème 3.5 *Soit (\mathcal{S}, φ) , une surface conforme. L'espace des modules des surfaces conformes de même genre et de même type que \mathcal{S} , $\mathcal{S}(\mathcal{S})$, est un espace topologique connexe.*

Preuve: $\Phi(\mathcal{S})$ a une topologie naturelle comme espace quotient de métriques riemanniennes sur la variété différentiable \mathcal{S} . On munie $\mathcal{S}(\mathcal{S})$ d'une topologie par transport de structure.

Nous allons montrer que $\Phi(\mathcal{S})$ est connexe par arcs. Soient φ et φ' deux structures conformes sur \mathcal{S} . Pour $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi_t = (1-t)\varphi + t\varphi'$ qui est une structure conforme sur \mathcal{S} pour tout $t \in [0, 1]$. De plus, $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_1 = \varphi'$. Ceci prouve que $\Phi(\mathcal{S})$ est connexe par arcs et donc aussi $\mathcal{S}(\mathcal{S})$. \square

En ce qui concerne l'espace de Teichmüller

Dans le cas des surfaces de Riemann, nous avons obtenu une structure analytique complexe sur l'espace de Teichmüller \mathcal{T}_g en utilisant les différentielles de Beltrami (section 3.1.3). On pourrait penser faire de même dans le cas des surfaces conformes. Malheureusement, il n'est pas possible de définir de différentielle de Beltrami sur une surface conforme (\mathcal{S}, φ) non orientable. En effet, pour tout $p \in \mathcal{S} \setminus \partial\mathcal{S}$ et U un ouvert orientable contenant p , la définition locale du fibré Ω sur U dépend du choix d'une structure presque complexe sur U , donc du choix d'une orientation (section 1.1.1). D'où l'impossibilité de définir globalement Ω si \mathcal{S} n'est pas orientable.

Ne pouvant définir de fibrés vectoriels holomorphe sur une surface conforme (\mathcal{S}, φ) quelconque, il faudrait pouvoir définir un fibré qui soit, localement sur chaque ouvert orientable $U \subseteq \mathcal{S}$, un couple non ordonné de deux fibrés vectoriels holomorphes conjugués, chacun correspondant au choix d'une orientation sur U . Mais cela revient à définir un fibré vectoriel holomorphe sur le double revêtement $\tilde{\mathcal{S}}$ de (\mathcal{S}, φ) par une surface de Riemann (défini dans la section 1.3.1).

Dans les sections suivantes, nous allons chercher une structure pour les espaces de Teichmüller des surfaces conformes. Pour cela, nous allons utiliser les liens, exposés dans la section 1.3.3, entre les surfaces de Riemann, dont nous connaissons la structure des espaces de Teichmüller, et surfaces conformes.

Afin d'obtenir une structure sur les espaces de Teichmüller des surfaces conformes, nous avons besoin de la notion de morphisme quasi-conforme entre surfaces conformes. On dira que $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est un morphisme quasi-conforme entre les surfaces conformes (\mathcal{S}, φ) et (\mathcal{S}', φ') si le morphisme $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}'}$, obtenu comme dans le corollaire 1.3.1, est quasi-conforme; $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est conforme

si \tilde{f} l'est. Bien sûr, la notion de morphisme conforme découlant de cette définition coïncide avec celle de morphisme conforme entre surfaces conformes.

On notera $\widehat{\mathcal{M}}_{g,\tau} = \{[\mathcal{X}, \varphi, f] \mid f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \text{ homéomorphisme quasi-conforme}\}$. On peut définir sur $\widehat{\mathcal{M}}_{g,\tau}$ la même relation d'équivalence \sim que sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,\tau}$ (cf. section 3.2.1). On note alors $\overline{\mathcal{M}}_g = \widehat{\mathcal{M}}_g / \sim$.

Soit \mathcal{S} une surface compacte différentiable. On note $Q(\mathcal{S})$ l'ensemble des homéomorphismes $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ qui sont quasi-conformes. C'est un groupe pour la composition. $Q^0(\mathcal{S})$ est le sous-groupe de $Q(\mathcal{S})$ des homéomorphismes homotopes à l'identité. $Q(\mathcal{S})$ agit à droite sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,\tau}$ de façon identique à l'action de $Diff_{g,\tau}$ sur $\mathcal{M}_{g,\tau}$ et la prolonge. On obtient, comme dans le cas des surfaces de Riemann (section 3.1.3) une bijection entre $\overline{\mathcal{M}}_{g,\tau}/Q^0(\mathcal{S})$ et l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,\tau}$.

3.3.2 Cas des surfaces non géométriquement irréductibles

Dans cette section, nous allons étudier les espaces de Teichmüller des surfaces conformes non géométriquement irréductibles de genre g (voir proposition 1.3.2), i.e. des surfaces conformes orientables sans bord, donc de type $+0$. On fixe (\mathcal{S}, φ) une surface conforme non géométriquement irréductible de genre g . D'après la section 1.1.3, il existe deux structures de surface de Riemann sur \mathcal{S} induites par φ . On en choisie une \mathfrak{S} , ce qui revient à choisir une orientation sur \mathcal{S} .

Surfaces marquées et modelées

Soit (\mathcal{X}, ψ, f) une surface conforme marquée et modelée sur (\mathcal{S}, φ) . Comme précédemment ψ induit deux structures de surface de Riemann sur \mathcal{X} , chacune induisant une orientation. On note \mathfrak{X}_f celle qui fait de f un morphisme préservant l'orientation et $\mathfrak{X}_{\bar{f}}$ sa surface de Riemann conjuguée. Alors (\mathfrak{X}_f, f) est une surface de Riemann marquée et modelée sur \mathfrak{S} . On note $\tilde{\rho} : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,0+} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_g$ l'application définie par $\tilde{\rho}(\mathcal{X}, \psi, f) = (\mathfrak{X}_f, f)$.

Réciproquement, soit (\mathfrak{X}, f) une surface de Riemann marquée et modelée sur \mathfrak{S} . Alors \mathfrak{X} induit une structure conforme $\psi_{\mathfrak{X}}$ sur \mathcal{X} et $(\mathcal{X}, \psi_{\mathfrak{X}}, f)$ est une surface conforme marquée et modelée sur \mathfrak{S} . On note $\tilde{\kappa} : \widetilde{\mathcal{M}}_g \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{g,0+}$ l'application définie par $\tilde{\kappa}(\mathfrak{X}, f) = (\mathcal{X}, \psi_{\mathfrak{X}}, f)$.

$\tilde{\rho}$ et $\tilde{\kappa}$ sont inverse l'une de l'autre. On a donc une bijection entre $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,0+}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_g$.

Soient (\mathcal{X}, ψ, f) et $(\mathcal{X}', \psi', f')$ deux surfaces conformes marquées et modelées sur (\mathcal{S}, φ) telles que $(\mathcal{X}, \psi, f) \sim (\mathcal{X}', \psi', f')$ (voir section 3.2.1). Alors $f \circ f'^{-1}$ préserve les orientations induites par \mathfrak{X}_f et $\mathfrak{X}_{f'}$ puisque \mathfrak{X}_f et $\mathfrak{X}_{f'}$ sont choisies de telle sorte que $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{X}_f$ et $f' : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{X}_{f'}$ préservent l'orientation. De plus d'après la proposition 1.1.10, $f \circ f'^{-1} : \mathfrak{X}_{f'} \rightarrow \mathfrak{X}_f$ est un morphisme de surface de Riemann. Donc $(\mathfrak{X}_f, f) \sim (\mathfrak{X}_{f'}, f')$ comme surfaces de Riemann marquées et modelées sur \mathfrak{S} .

Réciproquement si (\mathfrak{X}, f) et (\mathfrak{X}', f') sont deux surfaces de Riemann marquées et modelées sur \mathfrak{S} équivalentes, alors $(\mathcal{X}, \psi_{\mathfrak{X}}, f)$ et $(\mathcal{X}', \psi_{\mathfrak{X}'}, f')$ sont équivalentes comme surfaces conformes marquées et modelées sur (\mathcal{S}, φ) .

On obtient donc une bijection entre $\mathcal{M}_{g,0+}$ et \mathcal{M}_g , donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{g,0+} & \longleftrightarrow & \mathcal{M}_g \\ [(\mathcal{X}, \psi, f)] & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & [(\mathfrak{X}_f, f)] \\ [(\mathcal{X}, \psi_{\mathfrak{X}}, f)] & \xleftarrow{\tilde{\kappa}} & [(\mathfrak{X}, f)] \end{array}$$

Actions de groupes de difféomorphismes

On rappelle deux sous-groupes distingués du groupe $Diff(\mathcal{S})$ des difféomorphismes de \mathcal{S} :

$Diff^+(\mathcal{S}) = \{f \in Diff(\mathcal{S}) \mid f \text{ préserve l'orientation}\}$ et $Diff^0(\mathcal{S}) = \{f \in Diff(\mathcal{S}) \mid f \text{ homotope à l'identité}\} \subseteq Diff^+(\mathcal{S})$. κ est compatible avec l'action de $Diff^0(\mathfrak{S})$ sur \mathcal{M}_g . En effet soit $\alpha \in Diff^0(\mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{X}, f) \in \widetilde{\mathcal{M}}_g$. Alors

$$\tilde{\kappa}(\alpha \cdot (\mathfrak{X}, f)) = \tilde{\kappa}(\mathfrak{X}, f \circ \alpha) = (\mathcal{X}, \psi_{\mathfrak{X}}, f \circ \alpha) = \alpha \cdot (\mathcal{X}, \psi_{\mathfrak{X}}, f) = \alpha \cdot (\tilde{\kappa}(\mathfrak{X}, f))$$

et

$$\kappa(\alpha \cdot [\mathfrak{X}, f]) = \kappa([\alpha \cdot (\mathfrak{X}, f)]) = [\tilde{\kappa}(\alpha \cdot (\mathfrak{X}, f))] = [\alpha \cdot (\tilde{\kappa}(\mathfrak{X}, f))] = \alpha \cdot [(\tilde{\kappa}(\mathfrak{X}, f))] = \alpha \cdot \kappa([\mathfrak{X}, f]).$$

Donc κ induit une application $\chi : \mathcal{T}_g = \mathcal{M}_g / \text{Diff}^0(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathcal{T}_{g,0+} = \mathcal{M}_{g,0+} / \text{Diff}^0(\mathfrak{S})$ qui est bijective car κ l'est. De plus, \mathcal{T}_g admet une structure de variété analytique complexe, donc par transport de structure, on obtient une structure analytique complexe sur $\mathcal{T}_{g,0+}$.

Remarque: Dans la section 3.2.3, On a montré que $\mathcal{T}_{g,0+}$ est un espace topologique réel de dimension $6g - 6$, ce qui correspond effectivement à la dimension de \mathcal{T}_g en temps qu'espace topologique réel.

Conclusion

On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 3.6 *L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,0+}$ est une variété analytique complexe de dimension $3g - 3$.*

3.3.3 Espace de Teichmüller des surfaces conformes géométriquement irréductibles

Actions de Σ

Soit (\mathfrak{S}, φ) une surface conforme géométriquement irréductible (voir proposition 1.3.2) de genre g et de type τ . Le genre de son double complexe $\tilde{\mathfrak{S}}$ (voir section 1.3.1) est donné par $\tilde{g} = \tilde{g}(g, \tau)$ (corollaire 1.3.1). D'après la proposition 1.3.2, $\tilde{\mathfrak{S}}$ est connexe. On rappelle que $\tilde{\mathfrak{S}}$ est naturellement munie d'une action du groupe de Galois Σ de \mathbb{C} sur \mathbb{R} . Afin d'éviter les confusions plus tard, on notera $\tilde{\Sigma}$ pour Σ et $\tilde{\sigma}$ pour σ lors de l'action de Σ sur $\tilde{\mathfrak{S}}$. On a vu aussi dans la section 1.3.3 que l'application qui à une surface conforme géométriquement irréductible (\mathfrak{X}, ψ) associe son double complexe $\tilde{\mathfrak{X}}$ est une bijection de la catégorie des surfaces conformes géométriquement irréductibles dans la sous-catégorie des surfaces de Riemann connexes et munies d'une action de Σ , avec morphismes équivariants.

On a une action de Σ sur la catégorie des surfaces de Riemann. En effet, soit \mathfrak{S} une surface de Riemann. La structure conforme induite par \mathfrak{S} sur \mathfrak{S} induit elle-même deux structures de surfaces de Riemann conjuguées \mathfrak{S} et \mathfrak{S}^- dépendant chacune du choix d'une orientation sur \mathfrak{S} . On pose $\sigma \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^-$ et si $f : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}'$ est une application holomorphe, elle induit une application holomorphe $f^- : \mathfrak{S}^- \longrightarrow \mathfrak{S}'^-$. Ainsi, l'application $\mathfrak{S} \longmapsto \mathfrak{S}^-$ définit une action de Σ sur la catégorie des surfaces de Riemann.

Cette action de Σ en induit une sur l'espace des modules $\mathcal{R}_{\tilde{g}}$. De plus, l'application holomorphe $\tilde{\sigma} : \tilde{\mathfrak{S}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}^-$ implique que $\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathfrak{S}}^-$ dans $\mathcal{R}_{\tilde{g}}$. L'action de Σ sur $\mathcal{R}_{\tilde{g}}$ induit alors une action de Σ sur $\tilde{\mathcal{M}}_{\tilde{g}}$, puis de Σ sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$ de la façon suivante : $\sigma \cdot [\mathfrak{X}, f] = [\mathfrak{X}^-, f^- \circ \tilde{\sigma}]$.

Soit $[\mathfrak{X}, f] \in \mathcal{M}_{\tilde{g}}$ telle que \mathfrak{X} soit munie d'une action de Σ avec f équivariante pour cette action de Σ sur \mathfrak{X} et l'action de $\tilde{\Sigma}$ sur $\tilde{\mathfrak{S}}$. Alors $f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1} = \sigma \circ f \circ f^{-1} = \sigma$ est analytique de \mathfrak{X} dans \mathfrak{X}^- puisque $\sigma : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^-$ est antiholomorphe. Donc $[\mathfrak{X}, f]$ est un point fixe pour l'action de Σ sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$.

Réciproquement, si $[\mathfrak{X}, f]$ est un point fixe pour l'action de σ sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$, alors $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^-$ dans $\mathcal{R}_{\tilde{g}}$. Cela signifie aussi que l'application $f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1} : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}^-$ est biholomorphe, donc $f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1} : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ est antiholomorphe. Comme $(f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1})^- \circ (f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1}) = f \circ \tilde{\sigma} \circ (f^-)^{-1} \circ \tilde{\sigma} \circ f^- \circ f^{-1} = id$, $f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1}$ induit une action de σ sur \mathfrak{X} . De plus f est équivariante relativement à cette action. En effet $(f^- \circ \tilde{\sigma} \circ f^{-1}) \circ f = f^- \circ \tilde{\sigma}$. Donc \mathfrak{X} peut être munie d'une action de Σ pour laquelle f est équivariante.

Ainsi, on obtient la

Proposition 3.3.1 *L'ensemble des points fixes $\mathcal{M}_{\tilde{g}}^\Sigma$ de $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$ pour l'action de Σ n'est autre que l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces marquées et modelées $[\mathfrak{X}, f]$ sur $\tilde{\mathfrak{S}}$, telles que \mathfrak{X} soit munie d'une action de Σ rendant f équivariante pour l'action de $\tilde{\Sigma}$ sur $\tilde{\mathfrak{S}}$.*

Σ agit sur $Diff^+(\tilde{\mathcal{S}})$, donc sur $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$, de la façon suivante : $\sigma \cdot \alpha = \tilde{\sigma} \circ \alpha \circ \tilde{\sigma}^-$. Les points fixes pour cette action sont évidemment les difféomorphismes équivariants. Ils forment les sous-groupes $Diff^+(\tilde{\mathcal{S}})^\Sigma$ de $Diff^+(\tilde{\mathcal{S}})$ et $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})^\Sigma$ de $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$. L'action de $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$ sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$ induit naturellement une action de $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})^\Sigma$ sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$ ainsi que sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}^\Sigma$. Les actions de Σ sur $\mathcal{M}_{\tilde{g}}$ et $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$ induisent une action de Σ sur $\mathcal{T}_{\tilde{g}} = \mathcal{M}_{\tilde{g}}/Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$, car

$$\sigma \cdot (\alpha \cdot [\mathcal{X}, f]) = \sigma \cdot [\mathcal{X}, f \circ \alpha] = [\mathcal{X}^-, (f \circ \alpha)^- \circ \tilde{\sigma}] = (\tilde{\sigma}^- \circ \alpha^- \circ \tilde{\sigma}) \cdot [\mathcal{X}^-, f^- \circ \tilde{\sigma}] = (\sigma \cdot \alpha)^- \cdot (\sigma \cdot [\mathcal{X}, f]).$$

Par construction $(\sigma \cdot \alpha)^-$ préserve l'orientation, donc $(\sigma \cdot \alpha)^- \in Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$. De plus, comme $\alpha \in Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})$, il existe une homotopie F telle que $F(\cdot, 0) = \alpha$ et $F(\cdot, 1) = id$. Alors $(\sigma \cdot F)^- = (\tilde{\sigma} \cdot F(\sigma(\cdot), \cdot))^-$ est continue et vérifie $(\sigma \cdot F)^-(\cdot, 0) = (\sigma \cdot \alpha)^-$ et $(\sigma \cdot F)^-(\cdot, 1) = id$, donc est une homotopie entre $(\sigma \cdot \alpha)^-$ et id .

On a alors l'inclusion suivante : $\mathcal{M}_{\tilde{g}}^\Sigma/Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})^\Sigma \subseteq \mathcal{T}_{\tilde{g}}^\Sigma$, où $\mathcal{T}_{\tilde{g}}^\Sigma$ est l'ensemble des points fixes pour l'action de Σ sur $\mathcal{T}_{\tilde{g}}$. En fait, C.J. Earle [Ear71] montre qu'il s'agit d'une bijection. Comme $\mathcal{T}_{\tilde{g}}$ admet une structure de variété analytique complexe, $\mathcal{T}_{\tilde{g}}^\Sigma$ a une structure de variété analytique réelle. (voir section 3.1.3). De plus $\mathcal{T}_{\tilde{g}}$ est un espace topologique réel de dimension $6\tilde{g} - 6$, donc $\mathcal{T}_{\tilde{g}}^\Sigma$ est un espace topologique réel de dimension $3\tilde{g} - 3$, c'est à dire $6g + 3c - 6$ si $\tau = +c$ et $3g + 3c - 6$ si $\tau = -c$, ce qui correspond à la dimension de l'espace de Fricke des surfaces conformes de genre g et de type τ (voir section 3.2.3).

Utilisation des liens entre surface conforme et double complexe

Les résultats précédents et ceux de la section 1.3 permettent de construire une application

$$\tilde{\rho}_{g,\tau} : (\mathcal{X}, \psi, f) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{g,\tau} \mapsto (\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{f}) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\tilde{g}(g,\tau)}^\Sigma$$

Avec $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,\tau} = \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{S}, \varphi)$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{\tilde{g}(g,\tau)} = \widetilde{\mathcal{M}}(\tilde{\mathcal{S}})$, où $\tilde{\mathcal{S}}$ est le double complexe de (\mathcal{S}, φ) , $\tilde{\mathcal{X}}$ celui de (\mathcal{X}, ψ) et $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ est construit à partir de $f : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{X}, \psi)$ d'après le corollaire 1.3.1.

Proposition 3.3.2 $\tilde{\rho}_{g,\tau}$ induit une bijection $\rho_{g,\tau} : \mathcal{M}_{g,\tau} \rightarrow \mathcal{M}_{\tilde{g}(g,\tau)}^\Sigma$
 $[\mathcal{X}, \psi, f] \mapsto [\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{f}]$

Preuve: Soit $(\mathcal{X}, \psi, f), (\mathcal{X}', \psi', f') \in \widetilde{\mathcal{M}}_{g,\tau}$ tels que $(\mathcal{X}, \psi, f) \sim (\mathcal{X}', \psi', f')$. Cela signifie que $(\mathcal{X}, \psi) = (\mathcal{X}', \psi')$ dans $\mathcal{S}_{g,\tau}$, donc en particulier $\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}'$ dans $\mathcal{R}_{\tilde{g}(g,\tau)}$. De plus $f \circ f^{-1}$ est holomorphe d'où $\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} = \tilde{f} \circ f^{-1}$ est holomorphe et $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{f}) \sim (\tilde{\mathcal{X}}', \tilde{f}')$. Donc $\rho_{g,\tau}$ est bien définie.

$\rho_{g,\tau}$ est une injection : soit $[\mathcal{X}, \psi, f], [\mathcal{X}', \psi', f'] \in \mathcal{M}_{g,\tau}$ tels que $\rho_{g,\tau}[\mathcal{X}, \psi, f] = \rho_{g,\tau}[\mathcal{X}', \psi', f']$, cela signifie que $\tilde{f} \circ \tilde{f}' = \tilde{f} \circ \tilde{f}' : \tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{X}}'$ un isomorphisme équivariant (pour l'action naturelle de Σ sur $\tilde{\mathcal{X}}$ et $\tilde{\mathcal{X}}'$). Il induit l'isomorphisme $(\tilde{f} \circ \tilde{f}')_\Sigma = f \circ f' : \tilde{\mathcal{X}}/\Sigma = (\mathcal{X}, \psi) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{X}}'/\Sigma = (\mathcal{X}', \psi')$. Donc $[\mathcal{X}, \psi, f] = [\mathcal{X}', \psi', f']$.

$\rho_{g,\tau}$ est aussi une surjection : soit $[\mathcal{X}, f] \in \mathcal{M}_{\tilde{g}}^\Sigma$. Alors il existe sur $\tilde{\mathcal{X}}$ une action de Σ rendant $f : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ équivariante. D'après la proposition 1.3.2, celle-ci induit un morphisme conforme $\tilde{f} : (\mathcal{S}, \varphi) \rightarrow (\mathcal{X}/\Sigma, \varphi_\Sigma)$ tel que $\rho_{g,\tau}([\mathcal{X}/\Sigma, \varphi_\Sigma, \tilde{f}]) = [\mathcal{X}, f]$ (voir section 1.3.3). \square

Il existe aussi une bijection $Diff^0(\mathcal{S}) \rightarrow Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})^\Sigma$ donnée par $\alpha \in Diff_{g,\tau} \mapsto \tilde{\alpha}$, où $\tilde{\alpha}$ est le difféomorphisme équivariant de $\tilde{\mathcal{S}}$, préservant l'orientation, tel que $\tilde{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$. Il est obtenu comme dans le corollaire 1.3.1, $(\tilde{\mathcal{S}}, \pi, \sigma)$ étant le double complexe de (\mathcal{S}, φ) .

Cette application est bien définie : si $\alpha \in Diff^0(\mathcal{S})$, il existe une homotopie F telle que $F(\cdot, 0) = \alpha$ et $F(\cdot, 1) = id$. Chacune des applications $F(\cdot, t)$ pour $t \in [0, 1]$ se remonte en une application $\tilde{F}(\cdot, t) : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$. Alors \tilde{F} , définie par $\tilde{F}(\cdot, t) = F(\cdot, t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, est une homotopie telle que $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{\alpha}$ et $\tilde{F}(\cdot, 1) = id$. De plus $\tilde{F}(\cdot, t)$ est équivariante pour tout $t \in [0, 1]$.

L'injectivité de $Diff^0(\mathcal{S}) \rightarrow Diff^0(\tilde{\mathcal{S}})^\Sigma$ est obtenue par unicité de $\tilde{\alpha}$ dans le corollaire 1.3.1

Conclusion

Les bijections entre $\mathcal{M}_{g,\tau}$ et $\mathcal{M}_{\tilde{g}}^{\Sigma}$ ainsi que celle entre $Diff^0(\mathcal{S})$ et $Diff^0(\tilde{\mathcal{S}}^{\Sigma})$ induisent une bijection entre $\mathcal{T}_{g,\tau} = \mathcal{M}_{g,\tau}/Diff^0(\mathcal{S})$ et $\mathcal{M}_{\tilde{g}}^{\Sigma}/Diff^0(\tilde{\mathcal{S}}^{\Sigma})$. Or $\mathcal{M}_{\tilde{g}}^{\Sigma}/Diff^0(\tilde{\mathcal{S}}^{\Sigma}) \simeq \mathcal{T}_{\tilde{g}}^{\Sigma}$ qui est une variété analytique réelle de dimension $3\tilde{g} - 3$. Par transport de structure, on obtient le théorème :

Théorème 3.7 *L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,\tau}$ admet une structure de variété analytique réelle de dimension $6g + 3c - 6$ si $\tau = +c$ ou $3g + 3c - 6$ si $\tau = -c$.*

Bibliographie

- [AG71] Norman L. Alling and Newcomb Greenleaf. *Foundations of the theory of Klein surfaces*, volume 219 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [Ahl54] Lars V. Ahlfors. On quasiconformal mappings. *Journal d'Analyse Mathématique*, 3:1–58, 1954.
- [BEGG90] Emilio Bujalance, José J. Etayo, José M. Gamboa, and Grzegorz Gromadzki. *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces*, volume 1439 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.
- [BGLL93] Alain Bouvier, Michel George, and François Le Lionnais. *Dictionnaire des Mathématiques*, quatrième édition, 1993.
- [Ear71] Clifford J. Earle. On the moduli of closed riemann surfaces with symetries. In Lars V. Ahlfors, Lipman Bers, Hershel M. Farkas, Robert C. Gunning, Irwin Kra, and Harry E. Rauch, editors, *Advances in the theory of Riemann surfaces*, number 66 in *Annals of mathematics studies*. Princeton university press, 1971.
- [FK91] Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology: a first course*, volume 58 of *Mathematics lecture note series*. Addison-Wesley publishing company, 1981.
- [Hir76] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.
- [Hui99] Johan Huisman. Real Teichmüller spaces and moduli of real algebraic curves. à paraitre, 1999.
- [IT92] Yoichi Imayoshi and Masahiko Taniguchi. *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag, 1992.
- [Jam55] Robert C. James. Combinatorial topology on surfaces. *Mathematics Magazine*, 29(1):1–40, 1955.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry (I)*, volume 15 of *Interscience tracts in pure and applied mathematics*. John Wiley and Sons, 1963.
- [KN69] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry (II)*, volume 15 of *Interscience tracts in pure and applied mathematics*. John Wiley and Sons, 1969.
- [Leh66] Joseph Lehner. *A Short Course in Automorphic Functions*. Selected topics in mathematics. Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1966.
- [Mac67] A.M. Macbeath. The classification of non-euclidean plane crystallographic groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 19(6):1192–1213, 1967.

- [Mar86] Ernesto Martínez. Convex fundamental regions for N.E.C. groups. *Archiv der Mathematik*, 47(5):457–464, 1986.
- [Mum75] David Mumford. *Curves and Their Jacobians*. The University of Michigan Press, 1975.
- [Nag88] Subhashis Nag. *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. John Wiley & Sons, 1988.
- [Nie27] Jacob Nielsen. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I. *Acta Mathematica*, 50:189–358, 1927.
- [Rem89] Reinhold Remmert. *Theory of Complex Functions*, volume 122 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1989.
- [Sin74] David Singerman. On the structure of non-euclidean crystallographic groups. *Proceedings of the Cambridge philosophical society*, 76(1):233–240, 1974.
- [Wel80] Raymon O’Neil Wells. *Differential analysis on Complex Manifold*, volume 65 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1980.
- [Wil66] H.C. Wilkie. On non-euclidean crystallographic groups. *Mathematische Zeitschrift*, 91(2):87–102, 1966.
- [ZVC70] H. Zieschang, E. Vogt, and H.-D. Coldewey. *Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen*, volume 122 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.